

Sind die beiden Drehungspunkte A und B , und betrachtet man den Punkt A , so wird dieser bei der Drehung um A liegen bleiben, und bei der Drehung um B auf einen Punkt C fallen. Dreht man dagegen zuerst um B , so fällt A auf C und darauf durch Drehung um A auf einen Punkt D . CD oder DC ist also die Grösse der Parallelverschiebung, welche hinzugefügt werden muss, wenn die Reihenfolge der beiden Drehungen verändert wird.

17. *Zwei Drehungen lassen sich zu einer zusammensetzen.*

Die Drehungen mögen um die Punkte A und B vor sich gehen. Von der Drehung, welche diese beiden ersetzen soll, ist nur der Drehungspunkt C unbekannt. Der Punkt A bleibt bei der Drehung um A liegen, und fällt bei der Drehung um B auf einen Punkt A_1 . C muss nun so bestimmt werden, dass $\angle ACA_1$ gleich der Summe der gegebenen Drehungswinkel ist, während das Verhältniss $CA_1 : CA$ gleich dem Producte der gegebenen Drehungsverhältnisse ist. Die gegebenen Drehungswinkel und Drehungsverhältnisse bestimmen also die Winkel und die Verhältnisse der Seiten in dem Dreieck, dessen Eckpunkte auf die drei Drehungspunkte fallen. Im Besonderen beachte man, dass, wenn zwei von diesen Punkten zusammenfallen, alle drei zusammenfallen, wie oben gezeigt wurde, und dass, wenn die gegebenen Drehungswinkel Null sind, die drei Drehungspunkte auf einer Geraden liegen. Die Drehungspunkte sind in diesem Falle die Aehnlichkeitspunkte der Figuren, welche paarweise ähnlich liegen. Dieser Satz wird später auf eine andere Art bewiesen werden.

18. Es wurde gezeigt, wie man durch Drehung und Inversion dazu gelangt solche Punktsysteme zu betrachten, wo jedem Punkte des einen Systems ein Punkt des anderen Systems, und jedem Kreise des einen Systems ein Kreis des anderen Systems entspricht (unter den Begriff Kreis die gerade Linie mit einbegriffen), und ferner wurde gezeigt, wie eben dieser Zusammenhang die Bedeutung der erwähnten Transformationen für die elementare Geometrie bedingt. Es liegen deshalb Gründe vor zu untersuchen, ob es nicht auch noch andere Transformationen giebt, bei denen Punkt und Punkt sowie Kreis und Kreis sich gegenseitig entsprechen, wenn alle Punkte der Ebene mit in beide Systeme aufgenommen werden.

A , B und C seien drei beliebige Punkte des einen Systems, und a , b und c die entsprechenden Punkte des anderen Systems. M sei ein beliebiger Punkt des ersten Systems, der nur nicht auf der Kreisperipherie ABC liegen darf. Den beiden Kreisen ABM und BCM entsprechen zwei Kreise abm und bcm des anderen Systems, und M muss deshalb m entsprechen. Die Abhängigkeit zwischen den beiden Systemen ist also vollständig bestimmt durch drei Punktenpaare. Nun beschreibe man in den Kreis ABC ein Dreieck $a_1b_1c_1 \sim abc$ derartig, dass Aa_1 , Bb_1 und Cc_1 sich in einem Punkte O schneiden. Diese Aufgabe lässt sich leicht lösen, da die Winkel bei O bekannt sind. Hieraus geht hervor, dass man durch Inversion aus dem System ABC ein dem System abc ähnliches System bilden kann, und dieses kann dann wieder durch eine Drehung (und nöthigenfalls durch eine Drehung um eine Axe) in das System abc transformirt werden.

Dadurch ist bewiesen, dass *zwei Systeme, in denen Punkt und Punkt, Kreis und Kreis sich gegenseitig entsprechen, immer durch Drehung und Inversion in einander transformirt werden können.*

19. Aus den in der Drehungstheorie bewiesenen Sätzen lassen sich neue Sätze von allgemeinerer Bedeutung durch die Methoden der neueren Geometrie ableiten. Da diese Anwendungen dem Plane dieses Buches fremd sind, mag es genügen ein Beispiel anzuführen. In **11** wurde bewiesen, dass eine gerade Linie, welche sich so bewegt, dass das Verhältniss der Abschnitte ab und bc , welche auf derselben durch drei feste Linien abgeschnitten werden, constant ist, sich um einen festen Drehungspunkt dreht, woraus folgt, dass jeder Punkt der Linie, welcher durch das Verhältniss bestimmt ist, nach welchem er z. B. ab theilt, auch eine gerade Linie beschreibt. Die genannten Verhältnisse lassen sich durch Doppelverhältnisse ausdrücken, wenn der Durchschnittspunkt der beweglichen Linie mit der unendlich fernen geraden Linie mit in Betracht gezogen wird. In der Form, welche der Satz dadurch erhält, drückt er eine projectivische Eigenschaft aus, nämlich:

Wenn eine bewegliche Gerade vier feste gerade Linien in Punkten mit constantem Doppelverhältniss schneidet, beschreibt jeder Punkt der Geraden (bestimmt durch Doppelverhältnisse) eine gerade Linie.

Lässt man zwei von den festen geraden Linien bis an die imaginären unendlich fernen Kreispunkte gehen, so erhält man hieraus:

Wenn ein gegebener Winkel ABC einen festen Scheitelpunkt A hat, und B und C feste gerade Linien durchlaufen, wird jeder Punkt D auf der Linie BC (bestimmt durch den Winkel BAD) eine gerade Linie beschreiben.

Anwendungen.

377. In ein gegebenes Dreieck ABC ein anderes Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen congruent ist.

Zufolge 9 hat ein System von ähnlichen Dreiecken, welche einem gegebenen Dreieck einbeschrieben sind, einen gemeinschaftlichen Drehungspunkt; man beschreibt deshalb in das gegebene Dreieck ein Dreieck von der verlangten Form und bestimmt den Drehungspunkt, indem man dieses als Grunddreieck betrachtet; das gesuchte Dreieck erhält man nun durch eine Drehung dieses Dreiecks, und diese Operation führt man am leichtesten dadurch aus, dass man das gezeichnete Grunddreieck mit Beziehung auf den Drehungspunkt multiplicirt, so dass es die verlangte Grösse erhält, und es darauf um denselben Punkt dreht, bis die Eckpunkte auf die Seiten des gegebenen Dreiecks fallen.

378. In ein gegebenes Viereck ein anderes zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist.

Ein Viereck, welches dem gegebenen ähnlich ist, wird mit drei von seinen Eckpunkten auf die Seiten des gegebenen Vierecks gelegt, und dann bestimmt man den Drehungspunkt wie in der vorhergehenden Aufgabe; es kommt nun darauf an, das Viereck um diesen Punkt so zu drehen, dass der vierte Eckpunkt auf die vierte Seite fällt; dieser Eckpunkt beschreibt aber während der Drehung eine gerade Linie (11), welche sich leicht zeichnen lässt; man kann nämlich durch eine Wiederholung derselben Construction einen zweiten Punkt dieser geraden Linie bestimmen, oder man kann sie auch erhalten, indem man eine Seite des gegebenen Vierecks um den gefundenen Drehungspunkt dreht. Falls man die erste Con-

struction anwendet, ist es unnöthig den Drehungspunkt zu suchen.

379. Auf vier gegebene gerade Linien eine fünfte so zu legen, dass die auf dieser gebildeten drei Abschnitte in einem gegebenen Verhältniss zu einander stehen.

Die Aufgabe ist ein specieller Fall der vorhergehenden, da die gesuchte gerade Linie als ein Viereck von bekannter Form betrachtet werden kann.

Anmerkung. Diese drei Aufgaben finden sich in dem ersten Buche von Newtons «*principia mathematica philosophiae naturalis*».

380. In ein gegebenes Dreieck ein anderes zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich, und dessen Flächeninhalt ein Minimum ist.

381. Ein Parallelogramm mit gegebenen Winkeln und gegebenem Umfang zu construiren, so dass jede Seite durch einen gegebenen Punkt geht.

Die Seiten AB , BC , CD und DA mögen beziehungsweise durch die gegebenen Punkte P , Q , R und S gehen. T sei der Durchschnittspunkt der Kreise SAP und PBQ ; dann ist T der Drehungspunkt für AB und eine beliebige zwischen den Kreisperipherien gezogene Linie A_1PB_1 , und folglich ist $AT:AB = A_1T:A_1B_1$.

Ist V der Durchschnittspunkt der Kreise PAS und SDR , so findet man auf ähnliche Weise das Verhältniss $AV:AD$, und dann lässt sich A bestimmen (189).

382. Auf drei gegebene Kreisperipherien ein Dreieck zu legen, welches demjenigen congruent ist, dessen Eckpunkte die drei Kreismittelpunkte sind.

Man suche den gemeinschaftlichen Drehungspunkt der drei Kreise; da ihre drei Mittelpunkte homologe Punkte sind, so ist das gegebene Dreieck das Grunddreieck, und der gefundene Drehungspunkt muss also der Drehungspunkt für dieses und das gesuchte sein; man erhält dasselbe also, wenn man das erste dreht, bis einer von seinen Eckpunkten auf die Peripherie fällt. Das gegebene Drehungsverhältniss ist hier 1, aber die

Aufgabe wird für ein anderes Verhältniss auf ähnliche Weise gelöst.

383. Ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen congruent ist, so dass jede der drei Seiten durch einen gegebenen Punkt geht.

Man zeichnet leicht ein Dreieck, welches dem gegebenen ähnlich ist, und dessen Seiten durch die gegebenen Punkte gehen; diese betrachte man als ähnliche Curven und das gezeichnete Dreieck als Grunddreieck der zweiten Art; dann bestimme man den Drehungspunkt, und multiplicire das gezeichnete Dreieck, so dass es die verlangte Grösse erhält. Da das Drehungsverhältniss für das so erhaltene und das gesuchte Dreieck 1 ist, müssen zwei homologe Seiten gleichen Abstand vom Drehungspunkte haben, und eine der gesuchten Linien ist also dadurch bestimmt, dass sie einen bekannten Kreis berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

384. Ein Viereck zu zeichnen, welches einem gegebenen ähnlich ist, so dass die vier Seiten einzeln durch einen von vier gegebenen Punkten gehen.

Man zeichne ein beliebiges Viereck, welches dem gegebenen ähnlich ist, so dass drei Seiten durch drei von den gegebenen Punkten gehen, und bestimme den Drehungspunkt wie in der vorhergehenden Aufgabe. Dieses Viereck muss nun so gedreht werden, dass die vierte Seite durch den vierten Punkt geht; das geschieht leicht, da sie ausser diesem Punkte einen festen Punkt enthält, der sich auf zwei Weisen bestimmen lässt (analog 378).

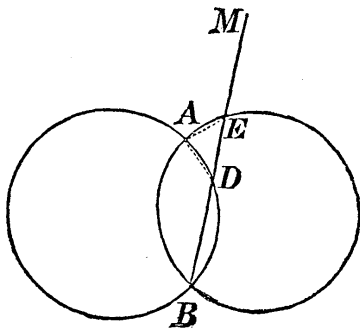
385. Um das Dreieck ABC ist ein Kreis beschrieben; von einem Punkte O auf dessen Peripherie ist an jede Dreiecksseite eine Linie gezogen, welche mit dieser Seite einen gegebenen Winkel bildet; man beweise, dass die Fusspunkte der drei Linien auf einer Geraden liegen.

Wählt man A , B und einen passenden Punkt auf AB zu homologen Punkten auf den drei Seiten, so wird O Drehungspunkt und die drei Fusspunkte homologe Punkte. Diese liegen auf einer Geraden, da das Grunddreieck eine gerade Linie ist.

386. Die Mittelpunkte dreier Kreise liegen auf den drei Eckpunkten B , C und D eines Parallelogramms. Ein Parallelogramm mit gegebenen Winkeln soll mit seinem einen Eckpunkt auf den vierten Eckpunkt A des Parallelogramms gelegt werden, und mit seinen anderen Eckpunkten auf die drei Kreisperipherien.

Multiplicirt man den Kreis C mit $\frac{1}{2}$ mit Beziehung auf A , so erhält man einen neuen Kreis. Dieser und die Kreise B und D haben eine gerade Linie, deren beide Abschnitte gleich gross sind, zum Grunddreieck. Die Diagonale B_1D_1 des gesuchten Parallelogramms muss deshalb diese drei Kreise in homologen Punkten schneiden und wird von A aus unter einem gegebenen Winkel gesehen. Dreht man BB_1 hinüber auf DD_1 , so fällt A auf einen bekannten Punkt A_1 , und $\angle AD_1A_1$ ist bekannt.

387. Man bestimme den geometrischen Ort für die Punkte, von welchen Tangenten an zwei gegebene Kreise in einem gegebenen Verhältniss stehen.



Die Kreise mögen sich in A und B schneiden und M sei einer der gesuchten Punkte; die Linie MB schneidet die beiden Kreise in D und E , und zufolge der gestellten Bedingung ist dann das Verhältniss zwischen $MD \cdot MB$ und $ME \cdot MB$, also auch zwischen MD und ME constant; da zugleich die Winkel im Dreieck ADE

constant sind, wird die ganze Figur $ADEM$ von constanter Form, und wenn sie sich um A so dreht, dass D und E Kreise beschreiben, muss M auch einen Kreis beschreiben. Da A gemeinschaftlicher Drehungspunkt für diesen und die gegebenen Kreise ist, so muss er ebenso wie diese durch A gehen. DEM stellt das Grunddreieck dar, und da das Dreieck, welches man durch Verbindung der drei Kreismittelpunkte erhält, diesem ähnlich ist, so sieht man, dass diese auf einer geraden Linie liegen müssen; die Abstände des gesuchten Mittelpunktes von den gegebenen verhalten sich wie

MD zu ME , und dieses Verhältniss ist das Quadrat des gegebenen.

388. An zwei gegebene Kreise zwei Tangenten zu ziehen, welche einen gegebenen Winkel mit einander bilden, und zwar so, dass die Linie, welche die Berührungspunkte der beiden Tangenten verbindet, durch einen gegebenen Punkt geht.
Die Aufgabe wird durch 14 auf 364 zurückgeführt.
389. An zwei gegebene Kreise zwei Tangenten zu ziehen, welche einen gegebenen Winkel mit einander bilden, und zwar so, dass die Linie, welche die Berührungspunkte der Tangenten verbindet, eine gegebene Richtung hat.
Die Aufgabe ist ein specieller Fall der vorhergehenden, indem der gegebene Punkt hier in unendlicher Ferne liegt.
390. In ein Dreieck ein anderes zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist, so dass die eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht.
Man bestimme drei homologe Punkte auf den gegebenen Linien, indem man das Dreieck, welches einbeschrieben werden soll, zum Grunddreieck nimmt.
Die Aufgabe ist nun auf 364 reducirt.
391. In ein Dreieck ein anderes Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist, und dessen Schwerpunkt auf eine der Medianen des gegebenen Dreiecks fällt.
Man beschreibe in das Dreieck zwei beliebige Dreiecke, welche dem gegebenen ähnlich sind; die Linie, welche die Schwerpunkte von diesen verbindet, schneidet die gegebene Mediane in dem gesuchten Schwerpunkt. Die Eckpunkte lassen sich nun leicht bestimmen, denn durch ein System von drei Eckpunkten auf einer der Seiten des gegebenen Dreiecks werden Abschnitte bestimmt, welche sich ebenso verhalten wie die Abschnitte, welche von den drei Schwerpunkten bestimmt werden.
392. In ein Dreieck ein anderes zu beschreiben, so dass zwei seiner Seiten gegebene Richtungen erhalten und die dritte Seite eine gegebene Länge bekommt.
Das einbeschriebene Dreieck sei abc , und bc sei die gegebene Seite. Der um abc beschriebene Kreis wird die Linie, auf

welche a fällt, in zwei Punkten schneiden, nämlich in a und einem anderen Punkte d . Man kennt nun alle Seiten des Dreiecks dbc .

393. Man soll drei Kreise zeichnen, wenn der Punkt gegeben ist, von dem aus die Kreise gleich gross erscheinen, ein Punkt auf jeder Kreisperipherie, das Verhältniss zwischen den Radien der Kreise und die Winkel, unter denen die Centralen von dem gegebenen Punkte aus gesehen werden.

Man kennt den gemeinschaftlichen Drehungspunkt der drei Kreise, ihre Drehungsverhältnisse und Drehungswinkel. Deshalb kann man die zwei gegebenen Punkte auf denselben Kreis hinüberdrehen, auf dem der dritte liegt, und dann kennt man drei Punkte dieses Kreises.

394. Gegeben sind zwei Kreise, welche sich in A und B schneiden sowie zwei Punkte P und R ; man soll in jedem der Kreise eine Sehne ¹²⁹ so ziehen, dass jede von diesen Sehnen durch einen der gegebenen Punkte geht, und dass die beiden Linien, welche die Endpunkte der Sehnen verbinden, durch A gehen. Betrachtet man die beiden Sehnen als ähnliche Figuren, so wird B der Drehungspunkt für diese und für die Kreise. Man kennt den Drehungswinkel und das Drehungsverhältniss und kann also den einen der gegebenen Punkte auf die Sehne hinüber drehen, welche den anderen Punkt enthält; nun kennt man zwei Punkte dieser Sehne.

395. X ist der Drehungspunkt für AB und CY , wo A , B und C gegebene Punkte sind; was für eine Curve beschreibt X , wenn Y eine gegebene Curve durchläuft?

Man bringe das Dreieck BAX durch Parallelverschiebung in die Lage B_1CX_1 . Die ähnlichen Dreiecke B_1CX_1 und YCX zeigen dann, dass B_1Y und CX_1 ein constantes Product haben und sich in entgegengesetzten Richtungen mit gleicher Winkelgeschwindigkeit drehen. X und Y beschreiben deshalb inverse Curven.

396. Ein Feldmesser kann drei Punkte A , B und C auf dem Felde sehen; die entsprechenden Punkte a , b und c sind auf dem Messtisch abgetragen. Er soll den Punkt auf dem Mess-

tisch bestimmen, der seinem Standpunkte auf dem Felde entspricht.

Der gesuchte Punkt ist der Drehungspunkt für die Dreiecke ABC und abc . Zieht man mit Hülfe des Diopterlineals Linien durch a , b und c , welche verlängert beziehungsweise durch A , B und C gehen würden, so bilden diese Linien das sogenannte Fehlerdreieck; dieses sei $\alpha\beta\gamma$, und zwar mögen sich die Linien durch a und b in γ schneiden u. s. w. Die Winkel α , β und γ können bei kleinen Veränderungen in der Stellung des Messtisches wegen der grossen Entfernung der Punkte A , B und C als constant betrachtet werden. Der gesuchte Punkt ist deshalb der Durchschnittspunkt der Kreise $a\gamma b$ und $a\beta c$. Indessen lassen sich diese Kreise nicht gut für die Construction verwenden, da sie sich nur schwierig genau zeichnen lassen und ihre Mittelpunkte oft ausserhalb des Tischblattes fallen. Nimmt man die inversen Figuren der Kreise mit a als Inversionscentrum und $a\beta \cdot a\gamma$ als Inversionspotenz, so geht der gesuchte Punkt über in den Durchschnittspunkt von zwei geraden, beziehungsweise durch β und γ gehenden, Linien, welche mit $\beta\gamma$ beziehungsweise die Winkel $ab\gamma$ und $ac\beta$ bilden. Die Construction ist also folgende: Man trägt $\angle \beta\gamma O_1 = \beta ca$ und $\angle \gamma\beta O_1 = \gamma ba$ ab (die Umlaufsrichtungen der Winkel sind hier berücksichtigt) und bestimmt dadurch einen Punkt O_1 . Nun wird der Messtisch gedreht, bis O_1a die Visirlinie nach A wird; die Dreiecke abc und ABC sind dann ähnlich liegend, und das Fehlerdreieck wird auf den gesuchten Punkt reducirt.

Zusätze.

Ueber den Durchschnitt von Kreisbogen.

Das Vorhergehende hat häufig gezeigt, wie wichtig es ist, eine Figur einer sorgfältigen Untersuchung zu unterwerfen, um die einfachen Beziehungen zu finden, welche zwischen den Stücken der Figur, namentlich zwischen ihren Winkeln statt finden. Eine solche Untersuchung lässt sich in der Regel mit Hülfe der Sätze über die Abhängigkeit zwischen Winkeln und Kreisbogen und ähnlicher elementarer Sätze durchführen; sind aber die Figuren ziemlich zusammengesetzt, so wird die grosse Menge der vorkommenden Winkel das Auffinden der einfachen Beziehungen oft erschweren. Deshalb wird es zweckmässig sein sich Mittel zu verschaffen, welche eine solche Untersuchung erleichtern können. Ein solches Mittel erhält man, wenn man eben die Winkel betrachtet, welche von Kreisbogen gebildet werden, da diese Betrachtung eine Figur oft übersichtlicher macht. Es ist nicht meine Absicht, hier eine erschöpfende Behandlung dieser Frage zu geben, sondern nur einige hierher gehörende Sätze aufzustellen, deren Anwendung in der Praxis man oft bequem finden wird.

1. *In einem Polygon, welches von Kreisbogen gebildet wird, ist die Summe der Seiten vermehrt um die Summe der Nebenwinkel der Polygonwinkel gleich $4 R$.*

Eine gerade Linie möge sich nämlich um das Polygon herum-drehen, so dass sie bei einem Eckpunkt anfängt, und die eine Seite berührt, bis sie den nächsten Eckpunkt erreicht hat; dann drehe

sie sich um diesen Eckpunkt, bis sie Tangente der folgenden Seite wird, und so fort, bis sie in ihre Anfangslage zurückkehrt; sie hat sich dann nach und nach um Winkel gedreht, welche theils gleich den Seiten des Polygons, theils gleich den Nebenwinkeln der Polygonwinkel sind, aber da sie sich gerade ein Mal herumgedreht hat, ist die Summe dieser Winkel gleich $4 R$.

Der Einfachheit wegen wurde vorausgesetzt, dass die Linie nach einer Umdrehung in ihre Anfangslage zurückkehrt; bei nicht convexen Polygonen kann sie sich indessen mehrere Male (oder keinmal) herumgedreht haben, so dass die gesuchte Winkelsumme jedes Vielfache von $4 R$ sein kann.

Damit der Satz allgemein gelten soll, muss man die Winkel und Bogen mit Vorzeichen nehmen nach der Umlaufsrichtung, in welcher sie durchlaufen werden.

2. In einem Dreieck ist die Summe der Winkel vermindert um die Summe der Seiten gleich $2 R$. Gehen die Seiten durch denselben Punkt (welcher nicht einer von den Eckpunkten des Dreiecks ist), so beträgt die Summe der Winkel $2 R$ und die Summe der Seiten ist Null.

Der letzte Satz lässt sich leicht beweisen, wenn man statt der Winkel des Dreiecks die ebenso grossen Winkel an dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der Seiten nimmt.

3. In einem Zweieck sind die beiden Winkel gleich gross und gleich der halben Summe der Seiten.

4. Ein Peripheriewinkel ist gleich der halben Summe aus seinen Schenkeln und dem Bogen, auf welchem er steht.

Verlängert man die Schenkel, bis sie ein Zweieck bilden, so wird der Winkel durch die halbe Summe der Seiten dieses Zweiecks gemessen. Die Summe der beiden Verlängerungen ist indessen gleich dem Bogen, auf welchem der Peripheriewinkel steht (2). Dieser Bogen muss mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen werden, je nachdem man ihn als Seite des einen oder des andern der beiden Dreiecke betrachtet, in welche das Zweieck getheilt ist.

5. Wenn von zwei Kreispaaren die Durchschnittspunkte jedes Paares jeder auf einem Kreise des anderen Paares liegen, so schneiden die beiden Kreise jedes Paares sich unter demselben Winkel (2).

6. In einem einbeschriebenen Viereck ist die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln gleich der Summe der beiden anderen. Gehen die vier Seiten durch denselben Punkt, so betragen die gleichgrossen Winkelsummen $2R$, und die Summe der Seiten ist Null. (4).

7. Falls in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegender Winkel gleich der Summe der beiden anderen ist, ist das Viereck ein einbeschriebenes.

Aus 1 folgt nämlich, dass die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln vermindert um die halbe Summe der Seiten gleich $2R$ ist. Diese Summe indessen ist eben die Summe der gegenüberliegenden Winkel in dem geradlinigen Viereck, dessen Eckpunkte mit denen des gegebenen zusammenfallen.

8. Berühren zwei Kreise zwei andere Kreise gleichartig, so liegen die vier Berührungspunkte auf einer Kreisperipherie. (7),

9. Jeder Kreis, welcher durch die Durchschnittspunkte von zwei festen Kreisen geht, schneidet ein System von Kreisen, welche die beiden festen (auf dieselbe Weise) berühren, unter gleichgrossen Winkeln.

Dieser Satz wurde früher (198) durch Inversion bewiesen, hier aber soll ein directer Beweis geführt werden, welcher auch gilt, wenn die beiden festen Kreise sich nicht schneiden; unter einem Kreise durch die Durchschnittspunkte dieser ist dann ein solcher Kreis zu verstehen, dass derselbe und die beiden festen Kreise eine gemeinschaftliche Potenzlinie haben.

Als einen Kreis kann man die gemeinschaftliche Tangente nehmen; diese möge die festen Kreise S_1 und S_2 in A und B berühren, während ein anderer Kreis S dieselben in C und D berührt. Der Kreis durch die Durchschnittspunkte der festen Kreise schneidet die gemeinschaftliche Tangente in E und S in F . Die Linien AC und BD schneiden sich auf S in dem Punkte O , dessen Tangente der gemeinschaftlichen Tangente parallel ist. Da die Punkte A , C , D und B auf einer Kreisperipherie liegen, hat O dieselbe Potenz mit Beziehung auf S_1 und S_2 . O hat deshalb auch dieselbe Potenz mit Beziehung auf die Kreise ACF , EF und BDF und muss deshalb auf der Potenzlinie von je zwei von diesen drei Kreisen liegen. Da die drei Kreise den Punkt F gemeinsam haben,

wird OF ihre gemeinsame Potenzlinie, und sie haben also noch einen gemeinschaftlichen, auf der OF belegenen, Durchschnittspunkt. Da die drei Kreise auf solche Art zwei Punkte gemeinsam haben, müssen ihre Mittelpunkte auf einer Geraden liegen. Da ACF und BDF durch die Berührungspunkte gehen, schneidet jeder von ihnen die gemeinschaftliche Tangente und die Tangente in F unter gleichen Winkeln, und ihre Mittelpunkte liegen deshalb auf einer Linie, welche den Winkel zwischen den beiden Tangenten halbirt. Da nun der Kreis EF seinen Mittelpunkt auf derselben Linie hat, muss er auch die gemeinschaftliche Tangente und die Tangente in F oder den Kreis S unter gleichen Winkeln schneiden.

Systeme von Kreisen.

Von den Bedingungen, durch welche ein Kreis bestimmt werden kann, sind besonders zu bemerken, 1) dass der Kreis durch einen gegebenen Punkt gehen soll, 2) dass er eine gegebene gerade Linie berühren soll und 3) dass er einen gegebenen Kreis berühren soll. Wählt man die drei Bedingungen, welche einen Kreis bestimmen, unter diesen aus, so erhält man eine Gruppe von Aufgaben, welche indessen, mit Ausnahme von vieren, in dem vorhergehenden gelöst worden sind. Bevor nun aber an die Auflösung dieser und einiger anderer damit verwandter Aufgaben gegangen wird, sollen zwei Sätze angeführt werden, welche Anwendung finden werden.

10. *Berührt ein Kreis zwei andere Kreise in A und B , so geht die Linie AB durch einen der Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise.*

AB möge den Kreis durch B zum zweiten Male in b schneiden. Man sieht dann leicht, dass der Radius nach b parallel dem in dem anderen Kreise nach A gezogenen Radius ist. A und b sind deshalb homologe Punkte in den beiden ähnlichliegenden Kreisen, und Ab geht deshalb durch den Aehnlichkeitspunkt.

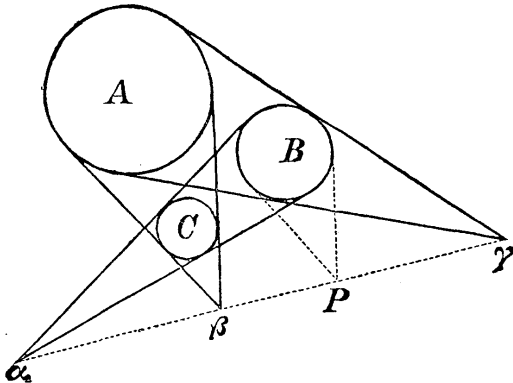
Berührt der Kreis die beiden Kreise gleichartig, dass heisst so, dass er beide ausschliessend oder einschliessend berührt, so geht die Linie durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt; berührt dagegen

der Kreis die beiden Kreise ungleichartig, so geht die Linie durch den inneren Aehnlichkeitspunkt.

Bedeutet O den Aehnlichkeitspunkt, so sind die beiden Kreise inverse Curven mit O als Inversionscentrum, und das Product $OA \cdot OB$ ist deshalb constant.

11. Die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte für je zwei von drei Kreisen liegen auf einer geraden Linie.

Die Kreise seien A , B und C , γ der Aehnlichkeitspunkt für A und B , β für A und C , α für B und C . Man ziehe an den



Kreis B zwei Tangenten, welche den gemeinschaftlichen Tangenten an A und C parallel sind und sich in einem Punkte P schneiden. Betrachtet man nun die beiden Kreise A und B , so sind β und P homologe Punkte und liegen also zugleich mit dem Aehnlichkeitspunkt γ auf einer geraden Linie. Betrachtet man die Kreise B und C , so werden P und β gleichfalls homologe Punkte und liegen also zugleich mit α auf einer geraden Linie. Daraus folgt, dass α , β und γ auf einer geraden Linie liegen.

Zusatz 1. Auf dieselbe Weise sieht man, dass eine gerade Linie durch zwei von den inneren Aehnlichkeitspunkten durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt des dritten Kreispaares geht.

Zusatz 2. Der Satz gilt auch für drei beliebige Curven, von denen je zwei ähnlich gegen einander liegen; man kann nämlich zu den drei Curven drei homologe Kreise hinzufügen; der Satz gilt dann für die Aehnlichkeitspunkte dieser, und diese werden auch die Aehnlichkeitspunkte der Curven.

Beispiele.

397. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise berührt, so dass die Linie, welche die beiden Berührungspunkte verbindet, durch einen gegebenen Punkt geht.

398. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise gleichartig berührt und eine durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise gehende gegebene Gerade unter einer gegebenen Sehne schneidet.
399. Gegeben sind zwei Kreise A und B , sowie die Punkte D , E und F ; man soll durch D einen Kreis C so ziehen, dass die Potenzlinie für A und C durch E , und die Potenzlinie für B und C durch F geht.
400. In einem Viereck $ABCD$ liegt die Seite AB fest, und die Verhältnisse zwischen den Abschnitten der Diagonalen sind constant; man bestimme den geometrischen Ort für CD . Die Diagonalen mögen sich in O schneiden, und es sei
$$AO : OC = m : n; BO : OD = p : q;$$
man nehme an, dass der Punkt O , welcher beliebig ist, eine gewisse Curve K durchlaufe. Multiplicirt man diese mit Beziehung auf A mit $\frac{m+n}{m}$ und mit Beziehung auf B mit $\frac{p+q}{p}$, so erhält man die Curven, welche gleichzeitig von C und D durchlaufen werden; dieselben sind ähnlich nach dem Verhältniss $\frac{p(m+n)}{m(p+q)}$ und ihr Aehnlichkeitspunkt ist ein auf der Linie AB belegener Punkt M . (II. Zusatz 2). Da nun C und D homologe Punkte sind, geht die Linie CD durch M , da das Verhältniss $MC : MD$ gleich dem angegebenen ist. Auf dieselbe Weise ist ersichtlich, dass das Verhältniss $MB : MA$ constant ist, so dass M ein fester Punkt und also der geometrische Ort für CD wird.
401. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht. Man kennt die Potenz des Aehnlichkeitspunktes der gegebenen Kreise mit Beziehung auf den gesuchten Kreis. Dadurch lässt sich noch ein Punkt von diesem bestimmen, und die Aufgabe ist nun auf 238 reducirt.
402. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade sowie einen gegebenen Kreis berührt.

Die Aufgabe ist ein specieller Fall der vorhergehenden, denn man kann die gegebene Gerade als einen Kreis mit unendlich grossem Radius betrachten.

403. Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Die Aufgabe lässt sich durch die bei der Parallelverschiebung (S. 56) angeführte Methode auf 401 reduciren.

Diese Aufgabe kann auch durch ein Verfahren gelöst werden, welches ganz dem bei 201 angewendeten gleicht. Das zu construierende Dreieck ist dann dasjenige, dessen Eckpunkte auf die gesuchten Berührungspunkte fallen; die Seiten desselben gehen durch drei von den Aehnlichkeitspunkten der gegebenen Kreise, und benutzt man diese als Inversionscentra und nimmt solche Inversionspotenzen, dass je zwei Kreise durch die Inversion vertauscht werden, so wird jeder der Kreise nach drei Inversionen wieder auf sich selbst zurückfallen. Es ist also kein wesentlicher Unterschied zwischen dieser und der früher gelösten Aufgabe.

Die einfachste und eleganteste Lösung erhält man indessen durch Benutzung des Satzes, dass die Potenzlinie zweier Kreise einen Kreis, der beide berührt, und eine der gemeinschaftlichen Tangenten unter gleichen Winkeln schneidet.

Hieraus folgt nämlich, dass die Tangenten, welche den gesuchten Kreis in seinen Durchschnittspunkten mit den Potenzlinien der gegebenen Kreise berühren, denjenigen von den gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Kreise parallel sind, welche zu demselben System berührender Kreise gehören, wie der betrachtete. (Die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise gehören zu dem System von Kreisen, welches die beiden gleichartig, die inneren zu dem, welches die beiden ungleichartig berührt). A , B und C seien die gegebenen Kreise. Betrachtet man den gesuchten Kreis und den Kreis A als ähnlich liegend mit dem Berührungspunkt als Aehnlichkeitspunkt, so sind die beiden Potenzlinien für A und B und für A und C homolog den beiden Linien, von denen die eine die Berührungspunkte zwischen A und den gemeinschaftlichen Tangenten von A und B , und die andere die Berührungs-

punkte zwischen A und den gemeinschaftlichen Tangenten von A und C verbindet. Diese beiden Linien schneiden sich deshalb in dem Punkte, welcher dem Potenzcentrum der gegebenen Kreise homolog ist, und die Verbindungslinie dieser beiden Punkte geht deshalb durch den gesuchten Berührungspunkt. Die übrigen Aufgaben, in denen der Kreis durch drei der oben genannten Bedingungen bestimmt wird, können sämmtlich als specielle Fälle dieser Aufgabe betrachtet werden.

404. In ein Dreieck ABC sollen drei Kreise S_a , S_b und S_c beschrieben werden, so dass jeder von ihnen die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

Diese berühmte Aufgabe wurde zuerst von dem italienischen Mathematiker Malfatti († 1807) gelöst, welcher die Radien der gesuchten Kreise berechnete und für diese Werthe fand, welche sich leicht construiren liessen. 1826 gab Steiner an, dass jede der gemeinschaftlichen Tangenten in einem der Berührungspunkte von zwei von den Kreisen zugleich zwei von den Kreisen berührt, die sich in die drei Dreiecke beschreiben lassen, in welche das gegebene Dreieck durch die Halbierungslinien der Winkel getheilt wird, ein Satz, welcher sofort eine einfache Construction giebt. Steiner gab indessen keinen Beweis für den Satz, sondern gab an, derselbe lasse sich allein mit Hülfe einer Reihe Sätze über Aehnlichkeitspunkte, Potenzlinien, Potenzkreise u. s. w. lösen, welche Sätze er gleichzeitig aufstellte. Dieser Beweis wurde erst vollkommen übereinstimmend mit Steiners Forderungen im Jahre 1874 von Schröter geführt, der indessen ziemlich zusammengesetzte Inversionen benutzt. Hier soll nun die Steinersche Construction mit Hülfe ganz elementarer Sätze abgeleitet werden.

Die Berührungspunkte mit den Seiten mögen so bezeichnet werden, dass man, indem man den Umfang des Dreiecks durchläuft, nach und nach auf die Punkte A , c_1 , c_2 , B , a_1 , a_2 , C , b_1 , b_2 trifft, und S_a und S_b mögen sich in γ , S_a und S_c in β , S_b und S_c in α berühren. Ein Kreis, welcher S_a und S_c in β berührt und durch c_2 geht, schneidet AC in einem

Punkte D und bildet gleichgrosse Winkel mit AB und AC (9). Die Tangenten desselben in c_2 und D schneiden sich deshalb auf der Linie, welche $\angle A$ halbirt, und bilden mit den beiden Seiten ein einbeschriebenes Viereck, so dass der Bogen c_2D gleich dem Winkel A ist. Der Kreis $c_2\alpha\beta$ geht auch durch c_1 . Dieser Kreis und der Kreis βDb_2 mögen sich in E schneiden. Nun ist $\angle c_1Eb_2 = \angle c_1c_2\beta + \angle b_2D\beta = 180^\circ - \frac{1}{2}A$; hieraus folgt, dass der Kreis c_1Eb_2 seinen Mittelpunkt in A hat. Der Kreis $c_1c_2\alpha\beta$ schneidet AB , AE und die Tangente in c_2 unter gleichen Sehnen, denn $Ac_1 = AE$, und der Kreis schneidet AB und $D\beta c_2$ unter gleichen Winkeln. Auf dieselbe Weise ist ersichtlich, dass der Kreis $E\beta Db_2$ die AE und die Tangente in D unter gleichen Sehnen schneidet. Nun mögen die Tangenten in c_2 und D sich in F schneiden, während sie AE bezüglich in G und H schneiden. Aus $c_2F = DF$, $c_2G = EG$, $DH = EH$ folgt, dass die eine Seite des Dreiecks $G FH$ gleich der Summe der beiden anderen ist. Die Punkte G und H müssen deshalb mit F zusammen fallen, so dass AEF den Winkel A halbirt. Der Kreis $c_1c_2\alpha\beta$ schneidet also AB , AE und die Tangenten in α und β unter gleichen Winkeln, und man kann deshalb einen diesem concentrischen Kreis zeichnen, der die vier Linien berührt. Auf dieselbe Weise wird bewiesen, dass dieser Kreis auch die Linie berührt, welche den Winkel B halbirt, und damit ist dann der Steinersche Satz abgeleitet. Will man auch solche Kreise in Betracht ziehen, welche die Verlängerungen der Seiten berühren, so erhält die Aufgabe andere Lösungen, welche sich durch einfache Aenderungen des hier Entwickelten ergeben. Wenn man in der Aufgabe an Stelle der Seiten des Dreiecks drei Kreise setzt, so kann man die inverse Figur betrachten mit einem Durchschnittspunkt von zwei von den Kreisen als Inversionscentrum. Man schliesst dann leicht, dass der oben bewiesene Satz sich auf diesen Fall erweitern lässt, wenn man an Stelle der Halbirtungslinien der Winkel die Kreise setzt, welche die Winkel zwischen je zwei von den gegebenen hal-

birt (die Potenzkreise), und an Stelle der Tangente in β den dieser entsprechenden Kreis in der inversen Figur u. s. w.

Ueber die Möglichkeit, eine gegebene Aufgabe mit Hülfe von Zirkel und Lineal zu lösen.

Befindet man sich in der Lage, die Auflösung einer gegebenen Aufgabe nicht finden zu können, so würde die Frage sein, ob der Grund dafür darin liegt, dass man es nicht verstanden hat, die Aufgabe richtig anzufassen, oder ob der Grund vielleicht der ist, dass die Aufgabe zu denen gehört, welche sich mit Hülfe von Zirkel und Lineal nicht lösen lassen. Das Folgende wird Mittel an die Hand geben, um in den meisten Fällen diese Frage zu beantworten.

Sobald sich eine Aufgabe lösen lässt, muss die Lösung, wie complicirt sie auch sein mag, aus den beiden Operationen zusammengesetzt sein: eine gerade Linie durch zwei gegebene Punkte zu ziehen, und einen Kreis zu zeichnen, dessen Mittelpunkt und Radius gegeben sind. Jeder Punkt ist bestimmt als Durchschnittspunkt von zwei geraden Linien, oder von einer geraden Linie und einem Kreise, oder von zwei Kreisen. Denkt man sich nun, dass man mit Hülfe der Formeln und Methoden der analytischen Geometrie die Coordinaten der Punkte berechnet, wie man sie nach und nach construirt, so hat man im Laufe der ganzen Rechnung nur nöthig, Gleichungen des ersten und zweiten Grades aufzulösen. Man kann also jede durch die Construction bestimmte Grösse mit Hülfe der gegebenen Grössen ausdrücken, so dass die gefundenen Grössen keine anderen irrationalen Ausdrücke als Quadratwurzeln enthalten; da sich nun andererseits ein jeder solcher Ausdruck construiren lässt, so *ist die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass sich eine Aufgabe mittelst Zirkel und Lineal lösen lässt, die, dass die gesuchten Grössen rational durch die gegebenen und durch Quadratwurzeln ausgedrückt werden können.*

Eine Untersuchung der Gleichungen, welche sich durch Quadratwurzeln auflösen lassen, findet sich in des Verfassers «Om Ligninger, der kunne løses ved Kvadratrod», und «Theorie der

algebraischen Gleichungen, Kopenhagen, Andr. Fred. Høst & Sohn 1878. Kap. VII.» Hierin findet man folgende Sätze bewiesen:

1. *Ausser den Kegelschnitten giebt es keine Curven, deren Durchschnittspunkte mit einer beliebigen geraden Linie durch Zirkel und Lineal bestimmt werden können.*

2. *Ausser den Kegelschnitten giebt es keine Curven, an welche man mit Hilfe von Zirkel und Lineal Tangenten von einem beliebigen Punkte ziehen kann.*

3. *Falls man durch Zirkel und Lineal die Durchschnittspunkte eines beliebigen Strahls eines Strahlenbüschels und einer Curve, welche nicht durch den Scheitel des Strahlenbüschels geht, finden kann, muss die Ordnung der Curve eine Potenz von 2 sein, und in dem Büschel müssen wenigstens zwei Strahlen vorkommen, von deren Durchschnittspunkten mit der Curve je zwei zusammenfallen.*

Aus diesen Sätzen lassen sich neue durch Transformation ableiten, ebenso wie man auch die Untersuchungen weiter führen kann bis an andere Liniensysteme als den Strahlenbüschel, bis an Kreissysteme u. s. w. Hier mag es genügen, in Betreff dieser Erweiterungen auf die erwähnten Schriften zu verweisen, und nur folgende anzuführen:

4. *Es giebt keine anderen Curven als den Kreis und die gerade Linie, deren Durchschnittspunkte mit einem beliebigen Kreise durch Zirkel und Lineal bestimmt werden können.*

Dieser Satz lässt sich durch Inversion leicht aus dem oben zuerst genannten Satze ableiten, da der Kreis und die gerade Linie die einzigen Curven sind, welche durch Inversion mit einem beliebigen Inversionscentrum Kegelschnitte geben.

Diese Sätze sind in mannigfachen Fällen ausreichend.

Man nehme z. B. an, dass bei einer Aufgabe eine Linie gegeben sei, deren Lage ganz willkürlich ist, und dass ein gewisser Punkt X der Figur auf diese Linie fallen solle. Sieht man von dieser Bedingung ab, so erhält X einen geometrischen Ort, und zufolge des ersten der aufgestellten Sätze muss dieser ein Kegelschnitt sein, falls sich die Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösen lassen soll. Auf ähnliche Weise lässt sich der zweite Satz benutzen, wenn die Figur einen Punkt enthält, dessen Lage willkürlich ist.

Betrachtet man im Besonderen den ersten Fall, so sieht man,