Alexander Ziwet

EDGARDO CIANI

IL METODO DELLE COORDINATE PROIETTIVE OMOGENEE NELLO STUDIO DEGLI ENTI ALGEBRICI

PISA, ENRICO SPOERRI LIBRAIO EDITORE

IL METODO

DELLE

COORDINATE PROIETTIVE OMOGENEE

NELLO

STUDIO DEGLI ENTI ALGEBRICI

Alexander Ziwet

EDGARDO CIANI

PROFESSORE NELLA R. UNIVERSITÀ E NELLA R. SCUOLA NAVALE SUPERIORE
DI GENOVA

IL METODO

DELLE

COORDINATE PROIETTIVE OMOGENEE

NELLO

STUDIO DEGLI ENTI ALGEBRICI

(Sèguito alle lezioni di geometria proiettiva ed analitica)

PISA
ENRICO SPOERRI, EDITORE

1915

Pisa, Stabilimento Tipografico del Cav. F. Mariotti.

AL LETTORE

Il presente volume fa seguito alle mie «Lezioni di geometria proiettiva ed analitica» pubblicate tre anni indietro (Spoerri, Pisa 1912) e a quelle continuamente si connette. Poco ho da aggiungere a quanto scrissi, come prefazione, a quelle lezioni.

Accettato il principio che nel primo anno del corso universitario matematico e per un uditorio composto quasi esclusivamente di allievi-ingegneri non sia opportuno, nè utile, presentare ai giovani alcuna nozione di coordinate proiettive omogenee, tale utilità si fa palese invece, in tutta la sua pienezza, in un successivo anno di studio e diviene addirittura una necessità per coloro che si avviano alla matematica teorica e quindi all'insegnamento. Sotto questo punto di vista il presente libro completa e integra le mie citate «lezioni» costituendo quanto è desiderabile che un giovane conosca di geometria proiettiva e analitica prima di accingersi ai corsi di geometria superiore.

Mi sono limitato, in queste lezioni, al campo lineare e quadratico trattando quanto di essenziale riguarda le forme di 1.ª 2.ª e 3.ª specie. Quanto a quelle di 4.ª specie (lo spazio rigato) avrei dovuto quindi, per ragioni di analogia, svolgere (oltre i complessi e le congruenze lineari) tutta la teoria dei complessi quadratici: il senso della misura mi ha trattenuto e, circa a questi ultimi, mi sono limitato a considerare due soli esempi e cioè: il complesso tetraedrale e quello delle tangenti ad una quadrica.

I frequenti richiami al mio primo libro sono contrassegnati, per brevità, dal simbolo C seguito dalla indicazione del N^{o} che si vuole richiamare: quando il simbolo C manca s'intende che il numero richiamato è da ricercare nel volume attuale.

Ai trattati di cui mi sono giovato, e che ho citato nel primo volume, sono adesso da aggiungere i seguenti:

LAZZERI: *Trattato di Geometria analitica* (Livorno, R. Giusti, 1893).

BERTINI: *Lezioni di Geometria descrittiva* (litografie: Firenze, C. A. Materassi, 1907).

BERZOLARI: *Il metodo delle coordinate* (Manuali Hoepli, Milano, 1911).

BIANCHI: *Lezioni di Geometria analitica* (Pisa, E. Spoerri, 1915).

Genova, Luglio 1914.

EDGARDO CIANI.

PARTE PRIMA

SOPRA LE FORME GEOMETRICHE FONDAMENTALI DI PRIMA SPECIE.

CAPITOLO I.

Le coordinate proiettive sopra le forme di prima specie e la proiettività binaria.

1. — Coordinata proiettiva di un punto su di una retta. — Assumiamo sopra una retta propria r (fig. 1) tre punti fissi $F_1 F_2 P$ e cominciano dall'osservare che, dato un punto qualunque M, resulta individuato il valore del birapporto $(F_1 F_2 P M)$ che indicheremo con λ (C. n. 53). Viceversa, dato il numero reale λ esiste uno ed un sol punto M di r tale che si abbia (C. n. 62):

$$(F_1 F_2 P M) = \lambda.$$

Si può dunque istituire una corrispondenza biunivoca fra i punti di r e i corrispondenti valori del suddetto birapporto (C. n. 36) ed è perciò che il numero λ si chiama « *la coordinata proiettiva di* M ». I punti fissi F_1, F_2, P costituiscono gli elementi di riferimento: più precisamente F_1 ed F_2 si chiamano « *i punti fondamentali* ». Facendo coincidere M successivamente con F_1 e F_2 si ha:

$$(F_1 F_2 P F_1) = \infty, \ (F_1 F_2 P F_2) = 0.$$

Se poi M cade in P segue:

$$(F_1 F_2 P P) = 1$$

onde a P è venuto il nome di «*punto unità*».

Se fra due punteggiate distinte r ed r' passa una corrispondenza proiettiva e si scelgono come elementi di riferimento, sulle due punteggiate, due terne di punti corrispondenti in guisa dunque che ai punti F_1, F_2, P di r corrispondano, in r', i punti $F'_1 F'_2 P'$, avremo evidentemente (C. n. 58):

$$(F_1 F_2 P M) = (F'_1 F'_2 P' M')$$

dove con M' si è indicato il corrispondente di M nella proiettività in parola. Segue dunque che M ed M' hanno la stessa coordinata proiettiva e questo, mentre spiega l'origine del nome, mette anche in evidenza il vantaggio che l'attuale sistema di coordinate ha, sopra ogni altro, per lo studio delle proprietà proiettive.

2. — «*Il sistema delle ascisse su di una retta* (C. n. 36) *non è che un caso particolare del sistema di coordinate descritto nel numero precedente*». Basta prendere per punto fondamentale F_1 il punto improprio della retta, per punto fondamentale F_2 l'origine delle ascisse, e il segmento $\overline{F_2 P}$ come unità di misura positiva. Allora si ha (C. n. 64, 55):

$$\lambda = (F_1 F_2 P M) = (M P F_2 F_1) = \frac{\overline{M F_2}}{\overline{P F_2}} = \frac{\overline{F_2 M}}{\overline{F_2 P}} = \overline{F_2 M}\,.$$

Ma $\overline{F_2 M}$ non è altro che l'ascissa di M, il che prova la nostra affermazione.

3. — **Espressione del birapporto di quattro punti di una retta mediante le coordinate proiettive corrispondenti.** — Sieno i quattro punti $M_1 M_2 M_3 M_4$ della retta r individuati mediante le rispettive coordinate proiettive λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, in guisa che si abbia (n. 1):

$$(F_1 F_2 P M_1) = \lambda_1\,; \quad (F_1 F_2 P M_1) = \lambda_2\,; \quad (F_1 F_2 P M_3) = \lambda_3\,;$$
$$(F_1 F_2 P M_4) = \lambda_4\,.$$

Ora riferiamo proiettivamente la retta r a un'altra retta r' sulla quale venga stabilito un sistema di ascisse (C. n. 36) del quale indicheremo con O' l'origine e con P' il punto che ha per ascissa l'unità di misura positiva. Per individuare il riferimento suddetto stabiliremo che ai tre punti F_1, F_2, P di r corrispondano ordinatamente il punto improprio I'_∞ di r' e i punti O', P'. Siano poi $M'_1 M'_2 M'_3 M'_4$ i corrispondenti di $M_1 M_2 M_3 M_4$.

Avremo quindi: (C. n. 64, 58, 55)

$$\lambda_1 = (F_1 F_2 P M_1) = (M_1 P F_2 F_1) = (M'_1 P' O' I'_\infty) =$$

$$= \frac{\overline{M'_1 O'}}{\overline{P' O'}} = \frac{\overline{O' M'_1}}{\overline{O' P'}} = \overline{O' M'_1}.$$

Indicando dunque con $\lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 \lambda'_4$ le ascisse di $M'_1 M'_2 M'_3 M'_4$ sarà:

$$\lambda_1 = \lambda'_1$$

e analogamente:

$$\lambda_2 = \lambda'_2, \quad \lambda_3 = \lambda'_3, \quad \lambda_4 = \lambda'_4$$

per cui

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = (\lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 \lambda'_4).$$

Ma (C. n. 53):

$$(\lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 \lambda'_4) = (M'_1 M'_2 M'_3 M'_4)$$

e anche (C. n. 58):

$$(M'_1 M'_2 M'_3 M'_4) = (M_1 M_2 M_3 M_4).$$

Si conclude dunque:

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4). \tag{1}$$

È questa la espressione cercata. Essa permette quindi di sostituire al birapporto dei quattro punti $M_1 M_2 M_3 M_4$, secondo un ordine prestabilito, quello delle rispettive coordinate proiettive $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ succedentisi nel medesimo ordine. E anche adesso la (2) di C. n. 53 si può considerare come un caso particolare della (1) precedente.

4. — L'equazione della proiettività. — Le considerazioni del numero precedente possono servire anche a stabilire la equazione della proiettività. A tale scopo sieno L, M due punti variabili sopra due punteggiate l, m (distinte, o sovrapposte) e così collegati che fra le rispettive coordinate proiettive λ, μ passi la seguente relazione:

(1) $$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$$

dove a, b, c, d sono numeri reali qualunque sottoposti alla sola restrizione:

$$ad - bc \neq 0.$$

Se λ e μ fossero le ascisse di L, ed M sappiamo già che la (1) precedente individuerebbe una proiettività fra le due punteggiate e che, viceversa, una proiettività qualsiasi fra le due punteggiate si potrebbe rappresentare con una equazione del tipo (1) (C. n. 96, 97, 98). Dimostriamo adesso che altrettanto accade se λ e μ si riguardano come coordinate proiettive di L ed M. Infatti, come nel numero precedente, riferiamo proiettivamente la punteggiata l ad un altra l' in guisa che la coordinata proiettiva λ di L sia uguale all'ascissa λ' del punto L' corrispondente di L sopra l'. Altrettanto facciamo circa la punteggiata m riferendola proiettivamente ad un'altra m', così che la coordinata proiettiva μ di M si possa riguardare come l'ascissa μ' del punto M' corrispondente di M sopra m'. Ne segue che la relazione (1) si muta nella seguente

$$a\lambda'\mu' + b\lambda' + c\mu' + d = 0$$

fra λ' e μ'. Ma sappiamo bene che quest'ultima definisce una proiettività fra L' e M' e che viceversa ogni proiettività fra L' e M' si può rappresentare mediante una relazione fra λ' e μ' del tipo precedente. D'altra parte siccome la punteggiata l' è proiettiva ad l e la m' a m, così resulterà dimostrata anche la proiettività fra l ed m mediante la (1) medesima. Così pure ne segue che una proiettività qualunque fra due punteggiate potrà sempre rappresentarsi con una relazione del tipo (1) fra le coordinate proiettive di due punti corrispondenti.

Finalmente le considerazioni di C. n. 97 provano la necessità di imporre ai numeri a, b, c, d la restrizione $ad - bc \neq 0$.

Se la (1) è simmetrica si ha la involuzione.

5. — Punti immaginari. — I punti immaginari, già considerati nel piano in un sistema di coordinate cartesiane (C. n. 127), si possono ugualmente considerare quando la sede sia la retta, su di essa sia stabilito un sistema di coordinate proiettive e si conceda che la coordinata proiettiva di un punto variabile sulla retta medesima possa assumere anche valori complessi. Ponendo $\lambda = a + ib$ dove a e b sono numeri reali e $i = \sqrt{-1}$, il numero λ si chiamerà un punto immaginario della retta, però mancherà la sua rappresentazione geometrica. Il numero $\lambda_1 = a - ib$ si chiamerà il punto complesso coniugato. In seguito si chiariranno meglio i vantaggi di questa estensione di *linguaggio*.

6. — Coordinate proiettive omogenee di un punto sopra una retta. — Riprendiamo le considerazioni del n. 1. Per ottenere che la corrispondenza biunivoca fra i valori reali del birapporto $\lambda = (F_1 F_2 P M)$ e tutti i punti della retta valga senza eccezione siamo obbligati a considerare anche il valore ∞ di λ (che individua il punto F_1). Ebbene si ovvia a questo inconveniente scrivendo λ sotto la forma di quoziente, scrivendo cioè $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$ e avvertendo bene che per $\lambda = \infty$, si prenda $x_1 \neq 0$ e $x_2 = 0$. Introdotte questa convenzione, ne segue che se si danno a x_1, x_2 valori finiti (non entrambi nulli) ne risulta individuato λ, ossia $\frac{x_1}{x_2}$, ma i valori di x_1 e x_2 resultano individuati a meno di un fattore di proporzionalità. Dunque se x_1, x_2 variano proporzionalmente il punto M non varia. Chiameremo x_1, x_2 « *le coordinate proiettive omogenee* » di M osservando che tali sono anche $\varrho x_1, \varrho x_2$ dove ϱ è un qualunque numero finito diverso da zero. Quindi, ciò che importa per determinare la posizione del punto M sulla retta è il rapporto delle sue coordinate proiettive omogenee. Per indicare che $x_1 x_2$ sono tali coordinate di M si suole scrivere:

$$M \equiv (x_1, x_2).$$

In particolare:

$$F_1 \equiv (1, 0); \quad F_2 \equiv (0, 1); \quad P \equiv (1, 1).$$

Di qui in avanti le coordinate proiettive omogenee di un punto saranno chiamate brevemente le coordinate del punto sottintendendo sempre la qualifica di proiettive omogenee. Anche il punto all'infinito della retta non fa eccezione: le sue coordinate sono $(\overline{F_1P}, \overline{F_2P})$.

7. — Rappresentazione analitica della proiettività binaria mediante una sostituzione lineare intera omogenea in due variabili. — Per dimostrare subito, con un esempio, come la introduzione delle coordinate omogenee giovi, in semplificazione, riprendiamo l'equazione della proiettività (n. 4) risolvendola rispetto a λ. Si trova così:

$$\lambda = -\frac{c\mu + d}{a\mu + b} \tag{1}$$

cioè si trova λ espresso mediante una funzione lineare fratta di μ. Introducendo le coordinate omogenee si rimedia all'inconveniente di avere una funzione fratta. A tale scopo indichiamo con $x_1 x_2$ le coordinate proiettive omogenee del punto L e con $y_1 y_2$ quelle di M corrispondente di M in guisa dunque che si abbia:

$$\frac{x_1}{x_2} = \lambda, \quad \frac{y_1}{y_2} = \mu.$$

Allora la (1) precedente diviene:

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{cy_1 + dy_2}{ay_1 + by_2}$$

da cui si deduce:

$$\varrho x_1 = -(cy_1 + dy_2)$$
$$\varrho x_2 = (ay_1 + by_2)$$

dove ϱ è un fattore di proporzionalità. Se per maggiore opportunità di notazioni poniamo:

$$-c = a_{11}, \quad -d = a_{12}, \quad a = a_{21}, \quad b = a_{22}$$

le ultime formole trovate divengono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho x_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ \varrho x_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 . \end{array} \right. \tag{2}$$

Così alla (1) che dava λ espresso mediante una funzione lineare fratta non omogenea in μ, vengono a sostituirsi le (2) che esprimono $x_1 x_2$ come funzioni lineari intere omogenee in $y_1 y_2$. Esse si chiamano le formule di una sostituzione (o trasformazione) lineare intera omogenea in due variabili, o binaria.

La condizione restrittiva $ad - bc \neq o$, con i nuovi simboli è

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq o.$$

Essa può esprimersi esigendo che il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

sia differente da zero. Tale determinante chiamasi « *il modulo della sostituzione* ». Dalle (2), risolvendo rispetto alle y_i, si ricavano le formule inverse

$$(3) \qquad \begin{cases} \sigma y_1 = a_{22} x_1 - a_{12} x_2 \\ \sigma y_2 = - a_{21} x_1 + a_{11} x_2 \end{cases}$$

dove σ è un altro fattore di proporzionalità.

Alla equazione della proiettività data nel num. 4 si possono dunque sostituire le (2) precedenti e si ha quindi il seguente teorema:

« *Una proiettività fra due punteggiate equivale analiticamente a una sostituzione lineare binaria col modulo differente da zero* ». È perciò che una tale proiettività si suole chiamare « *una proiettività binaria* ».

8. — Punti uniti in due punteggiate proiettive sovrapposte. — Se le sedi delle due punteggiate coincidono si presenta la questione dei punti uniti (C. n. 82). Per ognuno di questi punti deve essere $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$ e quindi:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varrho x_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \varrho x_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases}$$

cioè:

$$(a_{11} - \varrho) x_1 + a_{12} x_2 = 0$$
$$a_{21} x_1 + (a_{22} - \varrho) x_2 = 0$$

e poichè i valori nulli contemporanei di x_1 e x_2 sono da escludere, si trova l'equazione:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$