dienen sollen, von vornherein mehrere Glieder, auf deren genauere Abschätzung es nicht ankommt, in ein abgekürztes Symbol zusammenzuziehen.

Das Zeichen genügt natürlich den Bedingungen:

1. Aus

$$f_1(x) = O(g_1(x)),$$
$$f_2(x) = O(g_2(x))$$

folgt

$$f_1(x) + f_2(x) = O(g_1(x) + g_2(x)).$$

Denn, wenn für $x \geqq \xi_1$

$$|f_1(x)| < A_1 g_1(x),$$

für $x \geqq \xi_2$

$$|f_2(x)| < A_2 g_2(x)$$

ist, so ist für $x \geqq \xi_3$, wo ξ_3 die größere der beiden Zahlen ξ_1, ξ_2 bezeichnet (d. h. eventuell ihren gemeinsamen Wert, falls sie gleich sind), in Zeichen, wo

$$\xi_3 = \text{Max.}\,(\xi_1, \xi_2)$$

ist,

$$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x)| &\leqq |f_1(x)| + |f_2(x)| \\ &< A_1 g_1(x) + A_2 g_2(x) \\ &< \text{Max.}\,(A_1, A_2) \cdot (g_1(x) + g_2(x)). \end{aligned}$$

Falls hierbei

$$g_1(x) = g_2(x)$$

ist, so ist natürlich

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= O(2 g_1(x)) \\ &= O(g_1(x)). \end{aligned}$$

2. Überhaupt folgt aus

$$f(x) = O(a g(x)),$$

wo a eine positive Konstante ist, offenbar

$$f(x) = O(g(x)).$$

Denn, wenn für $x \geqq \xi$

$$|f(x)| < A \cdot a g(x)$$

ist, so ist eben für jene x

$$|f(x)| < Aa \cdot g(x).$$

3. Es folgt aus

$$f_1(x) = O(g_1(x)),$$
$$f_2(x) = O(g_2(x))$$

offenbar

$$f_1(x) f_2(x) = O(g_1(x) g_2(x));$$

denn, wenn für $x \geqq \xi_1$

$$|f_1(x)| < A_1 g_1(x),$$

für $x \geqq \xi_2$

$$|f_2(x)| < A_2 g_2(x)$$

ist, so ist für $x \geqq \text{Max.}(\xi_1, \xi_2)$

$$|f_1(x) f_2(x)| < A_1 A_2 \cdot g_1(x) g_2(x).$$

Mit $O(1)$ bezeichne ich nach dem Obigen jede Funktion von x, welche für alle hinreichend großen x definiert ist und entweder für $x = \infty$ einen endlichen Limes besitzt oder wenigstens dem absoluten Betrage nach für alle hinreichend großen x unterhalb einer festen Schranke verbleibt. Eine reelle Funktion wird also mit $O(1)$ bezeichnet, wenn sie für $x = \infty$ endliche obere und untere Unbestimmtheitsgrenze besitzt, eine komplexe Funktion, wenn dies von ihrem reellen und imaginären Teil einzeln gilt.

Beispiele:

$$\sin x = O(1),$$

$$\frac{1+i}{x} = O(1),$$

$$\frac{\sin x}{x} = O(1),$$

$$\frac{\log x}{x} = O(1),$$

$$\frac{x}{x-10} = O(1)$$

usw.

Nicht so häufig, aber mitunter gebrauche ich auch folgendes Zeichen:

Definition: Wenn $f(x)$ und $g(x)$ von einem gewissen x an definiert sind und $g(x)$ für alle hinreichend großen x positiv ist, schreibe ich

$$f(x) = o(g(x))$$

(sprich etwa: klein o von $g(x)$), falls

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ist.

O soll an Ordnung, o an „von kleinerer Ordnung“ erinnern.

Natürlich folgt aus

$$f(x) = o(g(x))$$

a fortiori

$$f(x) = O(g(x));$$

ebenso folgt aus

$$f_1(x) = O(g_1(x))$$

nebst

$$f_2(x) = o(g_2(x))$$

unmittelbar nach Definition, daß

$$f_1(x) f_2(x) = o(g_1(x) g_2(x))$$

ist; denn

$$\limsup_{x=\infty} \frac{|f_1(x)|}{g_1(x)} < \infty,$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 0$$

liefert

$$\lim_{x=\infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 0.$$

Ich brauche wohl kaum die evidente Tatsache zu erwähnen, daß es eine Stufenleiter der Ordnungen für das Verhalten der Funktionen bei $x = \infty$ nicht gibt; z. B. von zwei für $x > 0$ definierten und für $x = \infty$ unendlich werdenden reellen Funktionen kann durchaus nicht immer eine als die stärker unendlich werdende bezeichnet werden.

Definition: Ich nenne zwei von einem x an positive Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ asymptotisch gleich, wenn

$$\lim_{x=\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$$

ist, und schreibe dafür

$$f_1(x) \sim f_2(x).$$

Diese Definition erfüllt natürlich die drei Bedingungen, welche für jeden derartigen Begriff erforderlich sind:

1. Sie ist symmetrisch in $f_1(x)$ und $f_2(x)$.
2. Es ist

$$f_1(x) \sim f_1(x).$$

3. Aus

$$f_1(x) \sim f_2(x),$$

$$f_2(x) \sim f_3(x)$$

folgt

$$f_1(x) \sim f_3(x).$$

(In der Tat folgt aus

$$\lim_{x=\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$$

und

$$\lim_{x=\infty} \frac{f_2(x)}{f_3(x)} = 1,$$

daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{f_1(x)}{f_3(x)} = 1$$

ist.)

Hierbei ist stets — was für meine Zwecke genügt — nur von Funktionen die Rede, die von einem gewissen x an positiv sind.

Beispiele:

$$x \sim x + \sin x,$$

$$x + 1000\sqrt{x} \sim x,$$

$$1 + \frac{1}{\log x} \sim 1,$$

$$\sqrt{x} \sim \sqrt{x+1},$$

$$\frac{1}{x + \log x} \sim \frac{1}{x},$$

$$\int_2^x \frac{du}{\log u} \sim \frac{x}{\log x}$$

usw.

Definition: Zwei von einem gewissen x an positive Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ haben dieselbe Größenordnung, wenn ihr Quotient

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

von einem gewissen x an unterhalb einer endlichen und oberhalb einer positiven Schranke verbleibt.

Diese Definition ist offenbar symmetrisch in $f_1(x)$ und $f_2(x)$; es ist eben notwendig und hinreichend, daß

$$f_1(x) = O(f_2(x))$$

und

$$f_2(x) = O(f_1(x))$$

ist. Ferner hat selbstverständlich $f_1(x)$ mit $f_1(x)$ dieselbe Größenordnung, und wenn $f_1(x)$, $f_2(x)$, sowie $f_2(x)$, $f_3(x)$ dieselbe Größenordnung haben, so haben ersichtlich $f_1(x)$ und $f_3(x)$ dieselbe Größenordnung.

Beispiel: x und $2x + 1 + x \sin x$ haben dieselbe Größenordnung.

Definition: Unter

$$\sum_{n=v}^{w} f(n)$$

verstehe ich, wenn $w \geqq v$ ist, mögen diese beiden Zahlen ganz sein oder nicht, die Summe

$$\sum_{n=[v]}^{[w]} f(n),$$

wo also n alle ganzen Zahlen des Intervalls von $[v]$ inkl. bis $[w]$ inkl. durchläuft, deren Anzahl $[w] - [v] + 1$ beträgt. Falls $w < v$ ist, möge

$$\sum_{n=v}^{w} f(n) = 0$$

sein.

Entsprechend sei

$$\prod_{n=v}^{w} f(n) = \prod_{n=[v]}^{[w]} f(n)$$

für $w \geqq v$, dagegen

$$\prod_{n=v}^{w} f(n) = 1$$

für $w < v$.

Beispiel:

$$\sum_{n=e}^{\pi} \log n = \log 2 + \log 3.$$

Definition[1]**:** Unter

$$\sum_{p \leqq x} f(p)$$

bzw.

$$\prod_{p \leqq x} f(p)$$

verstehe ich eine Summe bzw. ein Produkt, wo p nur alle Primzahlen $\leqq x$ durchläuft. In

$$\sum_{p} f(p)$$

und

$$\prod_{p} f(p)$$

1) Diese in der Einleitung schon mehrfach benutzte Bezeichnungsweise soll dauernd in diesem Werke verwendet werden.

ist gemeint, daß p alle Primzahlen, wachsend geordnet, durchläuft. Entsprechend sind die Angaben $v \leqq p \leqq w$, $p \geqq x$ und dergl. zu verstehen.

§ 13.

Divergenzbeweis der Reihe $\sum\limits_p \frac{1}{p}$ und des Produktes $\prod\limits_p \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$.

Satz: Die unendliche Reihe

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \cdots = \sum_p \frac{1}{p}$$

divergiert, d. h.[1] es ist

$$\lim_{x=\infty} \sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} = \infty;$$

das unendliche Produkt

$$\prod_p \frac{p}{p-1} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

divergiert auch, d. h.[2] es ist

$$\lim_{x=\infty} \prod_{p \leqq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \infty,$$

$$\lim_{x=\infty} \prod_{p \leqq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0.$$

Beweis: Bekanntlich divergiert die harmonische Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

d. h. es ist

$$\lim_{x=\infty} \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} = \infty.$$

Nach Annahme einer beliebigen positiven Größe g gibt es also ein $\xi = \xi(g)$, so daß

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\xi} \frac{1}{n} > g$$

ist.

1) Denn eine monoton zunehmende Folge positiver Größen kann nur konvergieren oder zu $+\infty$ divergieren.

2) Vgl. die vorige Anmerkung.

Wenn p irgend eine Primzahl ist, so ist

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots,$$

also, wenn diese Gleichung für alle Primzahlen $\leqq \xi$ angesetzt und alsdann das Produkt gebildet wird,

$$\prod_{p \leqq \xi} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \prod_{p \leqq \xi} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right). \tag{2}$$

Die rechte Seite von (2) ist aber offenbar, da das formal gebildete Produkt endlich vieler absolut konvergenter Reihen absolut konvergiert und beliebig geordnet werden darf,

$$= \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n},$$

wo n alle ganzen Zahlen durchläuft, deren Primfaktoren sämtlich $\leqq \xi$ sind. Nun ist aber, da die Zahlen $\leqq \xi$ gewiß alle zu diesen n in Σ' gehören,

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n} \geqq \sum_{n=1}^{\xi} \frac{1}{n},$$

also nach (1)

$$\begin{aligned} \prod_{p \leqq \xi} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} &= \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n} \\ &\geqq \sum_{n=1}^{\xi} \frac{1}{n} \\ &> g, \end{aligned}$$

womit die zweite Behauptung des Satzes, nämlich

$$\lim_{x=\infty} \prod_{p \leqq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \infty,$$

d. h.

$$\lim_{x=\infty} \prod_{p \leqq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0$$

bewiesen ist.

Daraus folgt aber unmittelbar die Divergenz der Reihe

$$\sum_{p} \frac{1}{p};$$

denn eine unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

mit positiven, sämtlich von 1 verschiedenen Gliedern ist bekanntlich (dann und) nur dann konvergent, wenn

$$\lim_{n=\infty} (1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_n)$$

vorhanden und von 0 verschieden ist.

§ 14.

Hilfssatz aus der Zahlentheorie.

Satz: Es seien $p', p'', \cdots, p^{(\varrho)}$ irgend ϱ gegebene verschiedene Primzahlen (nicht notwendig die ϱ ersten) und es sei $x > 0$. Dann ist die Anzahl

$$B(x) = B(x;\, p', p'', \cdots, p^{(\varrho)})$$

der ganzen Zahlen $\leqq x$, welche durch keine dieser ϱ Primzahlen teilbar sind,

$$\begin{aligned} B(x) = [x] & \qquad \text{(ein Glied)} \\ -\left[\frac{x}{p'}\right] - \cdots - \left[\frac{x}{p^{(\varrho)}}\right] & \qquad (\varrho \text{ Glieder}) \\ +\left[\frac{x}{p'p''}\right] + \left[\frac{x}{p'p'''}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{p^{(\varrho-1)}p^{(\varrho)}}\right] & \qquad \left(\binom{\varrho}{2} \text{Glieder}\right) \\ - \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \\ +(-1)^k\left[\frac{x}{p'p''\cdots p^{(k)}}\right] + \cdots & \qquad \left(\binom{\varrho}{k} \text{Glieder}\right) \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \\ +(-1)^\varrho\left[\frac{x}{p'p''\cdots p^{(\varrho)}}\right] & \qquad \text{(ein Glied).} \end{aligned}$$

Hierin stehen also in der $(k+1)$ten Zeile $(k = 1, \cdots, \varrho)$ die $\binom{\varrho}{k}$ Glieder, die allen Kombinationen der ϱ Primzahlen zu je k entsprechen, jedes mit dem Faktor $(-1)^k$ versehen. Die Anzahl aller Glieder ist also

$$\begin{aligned} 1 + \binom{\varrho}{1} + \binom{\varrho}{2} + \cdots + \binom{\varrho}{k} + \cdots + \binom{\varrho}{\varrho} &= (1+1)^\varrho \\ &= 2^\varrho. \end{aligned}$$

Beweis: 1. Für $\varrho = 0$ wäre der Satz trivial; wenn keine Primzahl gegeben ist, ist die Anzahl aller ganzen Zahlen bis x (inkl.)

$$B(x) = [x].$$

2. Für $\varrho = 1$ ist die gesuchte Anzahl (d. h. die Anzahl aller ganzen Zahlen $\leqq x$, die nicht durch p' teilbar sind) mit der Anzahl $[x]$ aller ganzen Zahlen $\leqq x$, vermindert um die Anzahl aller Multipla[1] von p', welche $\leqq x$ sind, identisch.

Nun hat allgemein für jedes m (mag es Primzahl sein oder nicht) die Anzahl seiner Multipla $\leqq x$ den Wert

$$\left[\frac{x}{m}\right];$$

denn, wenn

$$ym \leqq x$$

sein soll, so muß

$$y \leqq \frac{x}{m}$$

sein, und solcher positiver ganzer Zahlen gibt es stets $\left[\frac{x}{m}\right]$ (auch wenn $m > x$ ist, alsdann eben keine).

Daher ist die gesuchte Anzahl

$$B(x) = [x] - \left[\frac{x}{p'}\right],$$

was gerade die Behauptung ist.

3. Für $\varrho = 2$ ist die gesuchte Anzahl: Die Anzahl $[x]$ aller ganzen Zahlen $\leqq x$, vermindert um die Anzahl $\left[\frac{x}{p'}\right]$ aller Multipla $\leqq x$ von p', vermindert um die Anzahl $\left[\frac{x}{p''}\right]$ aller Multipla $\leqq x$ von p'', aber zum Schluß noch (da für jede Zahl, die zugleich durch p' und p'' teilbar ist, hierdurch zweimal eine Einheit weggenommen war, sie also zur Zeit gewissermaßen statt 0 mal -1 mal gezählt ist) vermehrt um die Anzahl $\left[\frac{x}{p'p''}\right]$ der Multipla $\leqq x$ von $p'p''$:

$$B(x) = [x] - \left[\frac{x}{p'}\right] - \left[\frac{x}{p''}\right] + \left[\frac{x}{p'p''}\right].$$

4. Es sei $\varrho \geqq 1$ beliebig. Dann bedeutet das allgemeine Glied

$$(-1)^k \left[\frac{x}{p^{(\nu_1)} \cdots p^{(\nu_k)}}\right]$$

des behaupteten Ausdruckes für $B(x)$, daß für jedes Multiplum von $p^{(\nu_1)} \cdots p^{(\nu_k)}$, das $\leqq x$ ist, eine Einheit zu- oder abgezählt wird, je nach-

1) Unter Multiplum verstehe ich das Produkt mit einer positiven ganzen Zahl.

dem k gerade oder ungerade ist. Wie oft ist also irgend eine Zahl $\leqq x$ berücksichtigt? Wenn sie durch keine der Primzahlen $p', \cdots, p^{(\varrho)}$ teilbar ist, einmal, nämlich im ersten Gliede $[x]$. Wenn sie durch mindestens eine und zwar genau γ $(1 \leqq \gamma \leqq \varrho)$ jener ϱ Primzahlen teilbar ist,

$$\begin{aligned} 1 - \gamma + \binom{\gamma}{2} - \cdots + (-1)^k \binom{\gamma}{k} + \cdots + (-1)^\varrho \binom{\gamma}{\varrho} \\ = 1 - \gamma + \binom{\gamma}{2} - \cdots + (-1)^\gamma \binom{\gamma}{\gamma} \\ = (1-1)^\gamma \\ = 0 \end{aligned}$$

Male; denn der $(k+1)$ten Zeile entsprechen gerade $\binom{\gamma}{k}$ Glieder mit dem Vorzeichen $(-1)^k$ (auch für $k > \gamma$, nämlich alsdann 0 Glieder).

Damit ist der Satz allgemein bewiesen.

§ 15.

Beweis des Satzes $\pi(x) = o(x)$.

Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine positive ganze Zahl eine Primzahl ist?

Diese Frage ist noch nicht präzise gestellt; denn der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist nur für endlich viele mögliche Fälle als der Quotient der Anzahl der günstigen durch die Anzahl der möglichen Fälle definiert. Wenn also gefragt wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine positive ganze Zahl $\leqq x$, wo $x \geqq 1$ ist, eine Primzahl ist, so lautet die Antwort ohne weiteres

$$\frac{\pi(x)}{[x]};$$

mit der zu Anfang dieses Paragraphen gestellten Frage ohne Hinzufügung des x meint man also natürlich, welches der Limes

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{[x]}$$

ist, korrekter ausgedrückt: ob dieser Limes existiert und, wenn ja, welchen Wert er hat. Wegen

$$\lim_{x=\infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

ist die Aufgabe identisch mit dem Problem, die Existenz des Limes

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{x}$$

mit etwaiger Wertbestimmung zu untersuchen.

Die Antwort gibt der

Satz: Es ist

$$\pi(x) = o(x),$$

d. h.

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0.$$

Beweis: Es sei $\delta > 0$ gegeben; nach dem Satz des § 13 gibt es ein ϱ derart, daß, wenn $p_1, \cdots, p_\varrho$ die ϱ ersten Primzahlen sind,

$$\prod_{\nu=1}^{\varrho}\left(1 - \frac{1}{p_\nu}\right) < \frac{\delta}{2} \tag{1}$$

ist. Ich nehme $x > p_\varrho$ an; dann ist offenbar

$$\pi(x) \leqq \varrho + B(x; p_1, p_2, \cdots, p_\varrho);$$

denn die $\pi(x) - \varrho$ von $p_1, \cdots, p_\varrho$ verschiedenen Primzahlen $\leqq x$ gehören sämtlich zu den $B(x; p_1, p_2, \cdots, p_\varrho)$ Zahlen $\leqq x$, welche weder durch $p_1, \cdots$, noch durch p_ϱ teilbar sind. Nach dem Satz des § 14 ist also

$$\pi(x) \leqq \varrho + [x] - \sum_{\nu=1}^{\varrho}\left[\frac{x}{p_\nu}\right] + \sum_{\substack{\nu,\nu'=1\\ \nu<\nu'}}^{\varrho}\left[\frac{x}{p_\nu p_{\nu'}}\right] - \cdots + (-1)^\varrho\left[\frac{x}{p_1\cdots p_\varrho}\right],$$

folglich, wenn ich alle 2^ϱ eckigen Klammern weglasse, was einen absolut genommen unterhalb 2^ϱ gelegenen Fehler verursacht,

$$\begin{aligned}\pi(x) &< \varrho + 2^\varrho + x - \sum_{\nu=1}^{\varrho}\frac{x}{p_\nu} + \sum_{\substack{\nu,\nu'=1\\ \nu<\nu'}}^{\varrho}\frac{x}{p_\nu p_{\nu'}} - \cdots + (-1)^\varrho\frac{x}{p_1\cdots p_\varrho}\\ &= \varrho + 2^\varrho + x\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_\varrho}\right)\\ &= \varrho + 2^\varrho + x\prod_{\nu=1}^{\varrho}\left(1-\frac{1}{p_\nu}\right),\end{aligned}$$

also wegen (1)

$$\pi(x) < \varrho + 2^\varrho + \frac{\delta}{2}x$$

Wird nun $\xi = \xi(\delta)$ so gewählt, daß

$$\xi > p_\varrho$$

und

$$\varrho + 2^{\varrho} < \frac{\delta}{2}\xi$$

ist, so ist für alle $x \geqq \xi$

$$\begin{aligned} \pi(x) &< \frac{\delta}{2}\xi + \frac{\delta}{2}x \\ &\leqq \frac{\delta}{2}x + \frac{\delta}{2}x \\ &= \delta x, \end{aligned}$$

$$\frac{\pi(x)}{x} < \delta,$$

womit die Behauptung

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$$

bewiesen ist.

Auf dem Wege zu unserem fernen Ziel

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

sind wir also schon so weit gelangt, daß wir wissen: $\pi(x)$ wird zwar mit x unendlich, aber schwächer als x.

Viertes Kapitel.

Beweis, daß $\pi(x)$ von der Größenordnung $\frac{x}{\log x}$ ist.

---

§ 16.

Hilfssatz über $T(x)$.

Definition: Für alle $x > 0$ sei $T(x)$ durch eine der Gleichungen

$$T(x) = \sum_{n=1}^{x} \log n,$$

$$T(x) = \log \prod_{n=1}^{x} n,$$

$$T(x) = \log([x]!)$$

definiert.

Für ganzzahlige $x > 0$ ist also insbesondere

$$T(x) = \log(x!).$$

Satz: Es ist

$$T(x) = x \log x - x + O(\log x).$$

Beweis: Es ist für $x \geqq 1$ einerseits[1])

$$\sum_{n=1}^{x} \log n = \sum_{n=1}^{x-1} \log n + \log [x]$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{x-1} \int_{n}^{n+1} \log u \, du + \log [x]$$

$$= \int_{1}^{[x]} \log u \, du + \log [x]$$

$$\leqq \int_{1}^{x} \log u \, du + \log x$$

$$= x \log x - x + 1 + \log x$$

(1) $$= x \log x - x + O(\log x),$$

andererseits

$$\sum_{n=1}^{x} \log n = \sum_{n=2}^{x} \log n$$

$$\geqq \sum_{n=2}^{x} \int_{n-1}^{n} \log u \, du$$

$$= \int_{1}^{[x]} \log u \, du$$

$$= \int_{1}^{x} \log u \, du - \int_{[x]}^{x} \log u \, du$$

$$\geqq \int_{1}^{x} \log u \, du - \log x$$

$$= x \log x - x + 1 - \log x$$

(2) $$= x \log x - x + O(\log x).$$

Aus (1) und (2) zusammengenommen folgt die Behauptung

$$T(x) = x \log x - x + O(\log x).$$

---

1) Die folgenden Rechnungen sind auch für $1 \leqq x < 2$ richtig, da alsdann nach Festsetzung $\sum\limits_{n=1}^{x-1}$ und $\sum\limits_{n=2}^{x}$ den Wert 0 bedeutet.

Von diesem Satze wird vorläufig nur die weniger scharfe Fassung

$$T(x) = x \log x + O(x)$$

zur Anwendung kommen.

§ 17.

Einführung der Funktionen $\vartheta(x)$, $\psi(x)$ und grundlegende Identität.

Definition: Es sei[1] für $x > 0$

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p$$

und $\psi(x)$ durch die von selbst abbrechende Reihe erklärt:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \cdots \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \vartheta(\sqrt[m]{x}).\end{aligned}$$

Offenbar ist

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{\frac{\log x}{\log 2}} \vartheta(\sqrt[m]{x});$$

denn

$$\sqrt[m]{x} \geqq 2$$

erfordert, daß

$$\frac{1}{m} \log x \geqq \log 2$$

ist.

Durch Vertauschung der Summationsfolge kann man für $x \geqq 1$ auch schreiben:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \leqq \sqrt[m]{x}} \log p \\ &= \sum_{p^m \leqq x} \log p \\ &= \sum_{p \leqq x} \log p \sum_{m \leqq \frac{\log x}{\log p}} 1 \\ &= \sum_{p \leqq x} \log p \left[\frac{\log x}{\log p}\right].\end{aligned}$$

1) $\vartheta(x)$ war bereits in § 4 so definiert.

Also ist $\psi(x)$ für $x \geqq 1$ offenbar der Logarithmus des kleinsten gemeinsamen Vielfachen aller ganzen positiven Zahlen bis x. Denn p kommt in mindestens einer dieser Zahlen in $\left[\frac{\log x}{\log p}\right]$facher Vielfachheit vor, nämlich in der nicht oberhalb x gelegenen Zahl

$$p^{\left[\frac{\log x}{\log p}\right]},$$

aber in keiner Zahl $\leqq x$ mit größerer Vielfachheit, da

$$\begin{aligned} p^{\left[\frac{\log x}{\log p}\right]+1} &> p^{\frac{\log x}{\log p}} \\ &= x \end{aligned}$$

ist.

Trivial ist über $\vartheta(x)$ als obere Abschätzung

$$\vartheta(x) = O(x \log x),$$

da doch gewiß

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &\leqq \sum_{p \leqq x} \log x \\ (1) \qquad &= \pi(x) \log x \\ &\leqq x \log x \end{aligned}$$

ist. Nach dem Ergebnis des vorigen Kapitels kann gleich noch schärfer aus (1)

$$\vartheta(x) = o(x \log x)$$

geschlossen werden.

Daraus folgt für $\psi(x)$ dieselbe Abschätzung $o(x \log x)$ folgendermaßen: Da

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \cdots$$

nur $O(\log x)$ Glieder enthält, von denen jedes höchstens gleich dem vorangehenden ist, ist

$$\begin{aligned} (2) \qquad \psi(x) &= \vartheta(x) + O(\log x\, \vartheta(\sqrt{x})) \\ &= o(x \log x) + o(\log x \cdot \sqrt{x} \log x) \\ &= o(x \log x). \end{aligned}$$

Zum Zwecke genauerer Abschätzungen schicke ich zunächst einige Hilfssätze voraus:

Satz: Wenn x und k positiv sind, davon k ganz, ist

$$\left[\frac{[x]}{k}\right] = \left[\frac{x}{k}\right].$$

Beweis: Es hat x jedenfalls die Form

$$x = g + \Theta,$$

wo g ganz und

$$0 \leqq \Theta < 1$$

ist; g ist eben $[x]$, und die Behauptung lautet

$$\left[\frac{g}{k}\right] = \left[\frac{g+\Theta}{k}\right].$$

Dazu ist nur zu beweisen, daß keine ganze Zahl y den Ungleichungen

$$\frac{g}{k} < y \leqq \frac{g+\Theta}{k}$$

genügen kann. In der Tat wäre alsdann

$$\frac{g}{k} < y < \frac{g+1}{k},$$

$$g < ky < g + 1,$$

was gewiß unmöglich ist.

Satz: Es ist für alle $x > 0$

$$(3) \qquad [x]! = \prod_{p \leqq x} p^{\left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \left[\frac{x}{p^3}\right] + \cdots}$$

Die Reihe im Exponenten bricht von selbst ab und hat für $x \geqq 1$ genau

$$\left[\frac{\log x}{\log p}\right]$$

Glieder, da

$$\frac{x}{p^m} \geqq 1$$

nur für

$$m \leqq \frac{\log x}{\log p}$$

besteht.

Die Behauptung kann auch

$$[x]! = \prod_p p^{\left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \cdots}$$

$$= \prod_p p^{\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left[\frac{x}{p^m}\right]}$$

geschrieben werden, wo nicht nur der Exponent eine (scheinbar) unendliche Reihe ist, sondern im Produkt p alle Primzahlen durchläuft; für $p > x$ ist eben der Exponent von selbst $= 0$.

Beweis: 1. Es sei x ganz. Dann ist zunächst klar, daß bei der Zerlegung von

$$[x]! = x!$$

in Primfaktoren nur Primzahlen $p \leqq x$ auftreten. Es fragt sich, wie oft p vorkommt. Die Anzahl der Multipla $\leqq x$ von p ist $\left[\frac{x}{p}\right]$. Das ist aber noch nicht die gesuchte Anzahl; denn p geht nicht in jedem Multiplum genau einmal auf. p geht mindestens zweimal in den $\left[\frac{x}{p^2}\right]$ Multipla $\leqq x$ von p^2 auf usf. Der Exponent von p in (3)

$$\left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \left[\frac{x}{p^3}\right] + \cdots$$

ist nun gleich der Anzahl der bis x (inkl.) gelegenen Multipla von p plus der Anzahl der Multipla $\leqq x$ von p^2 plus $\cdots$. Wenn also eine Zahl bis x durch p^λ, aber nicht durch $p^{\lambda+1}$ teilbar („genau λ Male durch p teilbar") ist, so ist p als Faktor von x genau

$$1 + 1 + \cdots + 1$$

Male berücksichtigt, wo λ die Anzahl der Einsen ist. Damit ist (3) für ganzzahliges x bewiesen.

2. Für nicht ganzzahliges x ist nach 1.

$$[x]! = \prod_{p \leqq [x]} p^{\left[\frac{[x]}{p}\right] + \left[\frac{[x]}{p^2}\right] + \cdots};$$

nach dem vorigen Satz können in den Exponenten die eckigen Klammern um x weggelassen werden, da

$$\left[\frac{[x]}{p^m}\right] = \left[\frac{x}{p^m}\right]$$

ist; ferner ist der Multiplikationsbereich $p \leqq [x]$ gewiß mit dem Bereich $p \leqq x$ identisch. Damit ist der Satz allgemein bewiesen.

Eine für das weitere grundlegende Identität liefert der

Satz: Für alle $x > 0$ ist

$$T(x) = \sum_{n=1}^{x} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Diese Summe kann natürlich auch bis $n = \left[\frac{x}{2}\right]$ oder auch bis $n = \infty$ erstreckt werden, da für

$$n > \frac{x}{2}$$

$$\psi\left(\frac{x}{n}\right) = 0$$

ist.

Beweis: Aus (3) folgt

$$T(x) = \log([x]!)$$

$$= \log \prod_{p \leqq x} p^{\left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \cdots}$$

(4) $$= \sum_{p \leqq x} \log p \left(\left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \cdots\right)$$

$$= \sum_{p \leqq x} \log p \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{x}{p^m}\right]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \leqq x} \log p \left[\frac{x}{p^m}\right]$$

(5) $$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \leqq \sqrt[m]{x}} \log p \left[\frac{x}{p^m}\right].$$

Nun ist

$$\sum_{p \leqq \sqrt[m]{x}} \log p \left[\frac{x}{p^m}\right] = \sum_{p \leqq \sqrt[m]{x}} \log p (1 + 1 + \cdots + 1),$$

wo die Klammer so viele Einsen enthält, als es ganze positive Zahlen $\leqq \frac{x}{p^m}$ gibt; man kann also schreiben:

$$\sum_{p \leqq \sqrt[m]{x}} \log p \left[\frac{x}{p^m}\right] = \sum_{p \leqq \sqrt[m]{x}} \log p \sum_{n=1}^{\frac{x}{p^m}} 1$$

und erhält durch Vertauschung der Summationsfolge

$$\sum_{p \leqq \sqrt[m]{x}} \log p \left[\frac{x}{p^m}\right] = \sum_{n=1}^{x} \sum_{p \leqq \sqrt[m]{\frac{x}{n}}} \log p$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \vartheta\left(\sqrt[m]{\frac{x}{n}}\right).$$

Dies gibt, in (5) eingesetzt:

$$T(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{x} \vartheta\left(\sqrt[m]{\frac{x}{n}}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{x} \sum_{m=1}^{\infty} \vartheta\left(\sqrt[m]{\frac{x}{n}}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{x} \psi\left(\frac{x}{n}\right),$$

was zu beweisen war.

Beispiel:

$$T(10) = \log 2 + \log 3 + \log 4 + \log 5 + \log 6 + \log 7 + \log 8 + \log 9 + \log 10$$
$$= 8 \log 2 + 4 \log 3 + 2 \log 5 + \log 7,$$
$$\psi\left(\tfrac{10}{1}\right) = \psi(10)$$
$$= \vartheta(10) + \vartheta\left(\sqrt{10}\right) + \vartheta\left(\sqrt[3]{10}\right)$$
$$= \vartheta(10) + \vartheta(3) + \vartheta(2)$$
$$= \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 7 + \log 2 + \log 3 + \log 2$$
$$= 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 5 + \log 7,$$
$$\psi\left(\tfrac{10}{2}\right) = \psi(5)$$
$$= \vartheta(5) + \vartheta\left(\sqrt{5}\right)$$
$$= \vartheta(5) + \vartheta(2)$$
$$= \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 2$$
$$= 2 \log 2 + \log 3 + \log 5,$$
$$\psi\left(\tfrac{10}{3}\right) = \psi(3)$$
$$= \vartheta(3)$$
$$= \log 2 + \log 3,$$
$$\psi\left(\tfrac{10}{4}\right) = \psi(2)$$
$$= \vartheta(2)$$
$$= \log 2,$$
$$\psi\left(\tfrac{10}{5}\right) = \psi(2)$$
$$= \vartheta(2)$$
$$= \log 2,$$
$$\sum_{n=1}^{10} \psi\left(\frac{10}{n}\right) = \sum_{n=1}^{5} \psi\left(\frac{10}{n}\right)$$
$$= 8 \log 2 + 4 \log 3 + 2 \log 5 + \log 7.$$

§ 18.

Beweis, daß $\psi(x)$ und $\vartheta(x)$ die Größenordnung x haben.

In diesem Paragraphen will ich zeigen, daß $\psi(x)$ im Sinne der Definition des § 12 mit x gleiche Größenordnung hat, ebenso $\vartheta(x)$; mit anderen Worten, daß

$$\psi(x) = O(x),$$

$$\vartheta(x) = O(x),$$

$$\frac{1}{\psi(x)} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

und

$$\frac{1}{\vartheta(x)} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

ist; noch anders ausgedrückt, daß die Quotienten

$$\frac{\psi(x)}{x}$$

und

$$\frac{\vartheta(x)}{x}$$

von einer gewissen Stelle an oberhalb einer positiven und unterhalb einer endlichen Schranke liegen. Jene Stelle kann natürlich alsdann $=2$ angenommen werden, da für jedes $\xi > 2$ auf der endlichen Strecke von 2 bis ξ die Quotienten gewiß zwischen zwei solchen Schranken liegen. Wegen

$$\vartheta(x) \leqq \psi(x)$$

braucht übrigens die obere Abschätzung nur für $\psi(x)$, die untere nur für $\vartheta(x)$ bewiesen zu werden. Es ist aber bequemer, beides direkt für $\psi(x)$ zu beweisen; damit sind die Behauptungen für $\vartheta(x)$ auf Grund der Relation § 17, (2)

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \vartheta(x) + O\left(\log x\, \vartheta(\sqrt{x})\right)\\ &= \vartheta(x) + O\left(\log x \cdot \sqrt{x} \log x\right)\\ &= \vartheta(x) + o(x),\\ \frac{\psi(x)}{x} &= \frac{\vartheta(x)}{x} + o(1)\end{aligned}$$

mitbewiesen.

Aus der Identität

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$