deuxième espèce) ; les entres (réels ou non) de ces cercles sont sur les axes de la conique donnée et équidistants du centre.

Les cercles conjugués à l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = a^2$ ont pour équation $x^2 + y^2 = \pm a^2$.

Le cercle conjugué au cercle réel $x^2 + y^2 = a^2$ est le cercle imaginaire $x^2 + y^2 = - a^2$.

Dans le cas de la parabole, il y a un seul cercle imaginaire de la première espèce, conjugué à la courbe par rapport au point symétrique du sommet relativement au foyer. Voir Conique conjuguée.

On donne aussi, très souvent, par abréviation, le nom de cercle conjugué au cercle polaire conjugué par rapport à un triangle. Voir Cercle polaire conjugué.

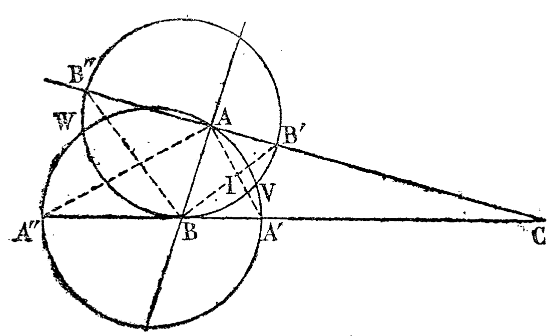
Cercle d'Adams. — Cercle concentrique au cercle inscrit ou à l'un des cercles exinscrits à un triangle ABC. Il coupe les côtés BC, CA et AB en six points D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 tels que les droites D_2E_1, E_2F_1, F_2D_1 se coupent au point de Gergonne. Ces droites rencontrent les côtés du triangle formé par les points de contact D, E, F du cercle inscrit en six points qui appartiennent au premier cercle de Lemoine de DEF.

Bibliographie. — *C. Adams.* — Die Lehre von den Transversalen, p. 77-80 (1843).

J.-S. Mackay. — Adams's hexagons and circles (P. E. M. S., 1892-93, t. 11, p. 104-106) ; Symmedians of a triangle and their concomitant circles (P. E. M. S., 1895-96, p. 52-54).

Voir aussi M., 1896, p. 204.

Cercle d'Apollonius. — Il y a trois cercles d'Apollonius. Chacun d'eux a pour diamètre le segment A′A″, B′B″, C′C″ déterminé sur chaque côté du triangle par les deux bissectrices issues du sommet opposé.



Ces trois cercles se coupent aux deux centres isodynamiques V, W, dont les coordonnées barycentriques sont respectivement proportionnelles à

$$\sin A \sin (A+60^{\circ}),\ \sin B \sin (B+60^{\circ}),\ \sin C \sin (C+60^{\circ})$$

et à

$$\sin A \sin (A-60^{\circ}),\ \sin B \sin (B-60^{\circ}),\ \sin C \sin (C-60^{\circ}).$$

En ces points, on a les relations métriques

$$\mathrm{AV.BC} = \mathrm{BV.CA} = \mathrm{CV.AB},$$
$$\mathrm{AW.BC} = \mathrm{BW.CA} = \mathrm{CW.AB}.$$

Équation. — Le cercle ayant pour diamètre A′ A″ est représenté en coordonnées barycentriques par l'équation

$$(b^2-c^2)\,\Sigma\, a^2\beta\gamma + a^2(c^2\beta - b^2\gamma)\,\Sigma\alpha = 0,$$

ou

$$a^2c^2\beta^2 - a^2b^2\gamma^2 + b^2(c^2+a^2-b^2)\alpha\gamma + c^2(a^2+b^2-c^2)\alpha\beta = 0,$$

ou encore

$$\frac{a^2b^2c^2}{b^2-c^2}\left(\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}\right) + a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0.$$

Son centre est au point $(0,\ b^2, -c^2)$.

Propriétés. — 1. — Les trois centres sont sur la droite de Lemoine

$$\frac{\alpha}{a^2}+\frac{\beta}{b^2}+\frac{\gamma}{c^2}=0.$$

2. — Les trois cercles coupent orthogonalement le cercle ABC. Ils ont un même axe radical qui est le diamètre OK du cercle de Brocard, représenté, comme on sait, par l'équation

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\alpha + \frac{c^2-a^2}{b^2}\beta + \frac{a^2-b^2}{c^2}\gamma = 0.$$

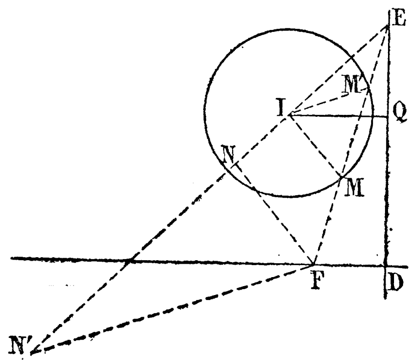
Cette droite passe donc par les deux points communs aux trois cercles, c'est-à-dire par les deux centres isodynamiques V, W.

3. — Les cordes communes aux cercles d'Apollonius et au cercle circonscrit sont les symédianes.

Bibliographie. — J. Neuberg, M., 1885, p. 204; E. Vigarié, J. S., 1888, p. 200-201 et 1889, p. 57.

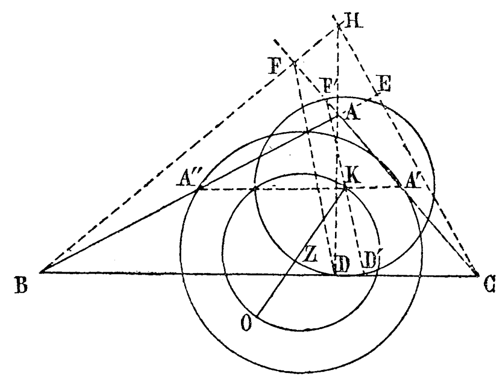
Cercle de Boscowich. — Boscowich a indiqué la construction que voici pour déterminer les points d'une conique.

Soient F un foyer, DE la directrice correspondante, e l'excentricité ou le rapport $\frac{c}{a}$. D'un point quelconque I menons IQ perpendiculaire à la directrice, puis décrivons une circonférence ayant pour centre I et pour rayon e. IQ. Joignons un point quelconque E de la directrice aux points I et F ; soient M, M′ les points de rencontre de la droite EF avec la circonférence I. Les parallèles menées par F aux rayons IM, IM′ coupent la droite EI en deux points N, N′ appartenant à la conique.



Bibliographie. — *Elementa Universæ Matheseos*, t. 3, Rome, 1754 (Boscowich) ; J. Casey, géom. analyt., 1885, p. 167 ; M., 1894, p. 163 ; J. E., 1895, p. 121-125 (Langley).

Cercle de Brocard. — O et K étant le centre du cercle circonscrit et le centre des symédianes (ou point de Lemoine), OK est le diamètre du cercle de Brocard. Il passe par les points de Brocard Ω, Ω′ et par les sommets du premier triangle de Brocard. C'est pourquoi l'auteur lui avait donné le nom de cercle ou circonférence des cinq points (N. C., 1880, p. 22), puis des sept points (N. C., 1880, p. 99 et A. F. A. S., Alger, 1881, Etude d'un nouveau cercle du plan du triangle, p. 138-159).



Pour l'étude et les propriétés de ce cercle, voir les ouvrages relatifs à la Géométrie récente du Triangle.

Équation. — Il a pour équation, en coordonnées barycentriques,

$$b^2 c^2 \alpha^2 + a^2 c^2 \beta^2 + a^2 b^2 \gamma^2 - a^4 \beta \quad - b^4 \alpha \gamma - c^4 \alpha \beta = 0,$$

et, en coordonnées normales,

$$a\,b\,c\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=a^3\,\beta\,\gamma+b^3\,\alpha\,\gamma+c^3\,\alpha\,\beta,$$

ou encore

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\sin\omega=\alpha\beta\sin(C-\omega)+\alpha\gamma\sin(B-\omega)+\beta\gamma\sin(A-\omega),$$

ω désignant l'angle de Brocard, qui est donné par la relation

$$\operatorname{cotg}\omega=\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C.$$

(J. Casey, Géom. analyt., 1885, p. 311).

Le rayon R a pour longueur

$$R=\frac{a\,b\,c}{4S}\,\frac{\sqrt{q^4-n^4}}{m^2},$$

m^2, n^4, q^4 désignant pour abréger

$$m^2=a^2+b^2+c^2,\quad n^4=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2,\quad q^4=a^4+b^4+c^4.$$

La notion des points et du cercle de Brocard a été généralisée et étendue par J. Casey à une classe de polygones appelés polygones harmoniques (voir *A Sequel to Euclid*, 6e édition, 1892, p. 220 et suiv.).

Cercle de Chasles. — Il y a deux cercles de ce nom. Ces cercles sont, dans l'ellipse ayant pour axes $2a$ et $2b$, les cercles concentriques à l'ellipse et de rayons $(a+b)$ et $(a-b)$.

Ces cercles interviennent dans la construction indiquée par Chasles pour déterminer les axes d'une ellipse, connaissant les longueurs de deux diamètres conjugués (voir les Traités de Géométrie analytique).

Propriétés. — La liste de la plupart des propriétés des cercles de Chasles a été publiée dans *Mathesis*, 1895, 1896, 1898.

Bibliographie. — *E.-N. Barisien.* — Propriétés des cercles de Chasles (M., 1895, pp. 129-134, 158-163, 241-250; 1896, p. 265-271).

H. Brocard. — Propriétés des cercles de Chasles, étude bibliographique (M., 1898, p. 61-66).

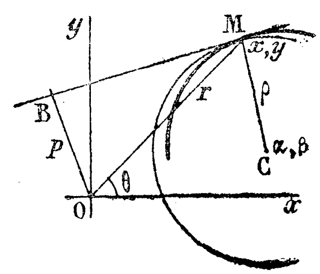
Voir aussi N. A., 1885, p. 150; J. S., 1885, p. 156; I. M., 1895, p. 206 et 1897, p. 62; M., 1896, p. 193-197 (A. Droz-Farny).

Cercle de courbure. — Si l'on désigne par Δs l'arc infiniment petit AB d'une courbe plane, par $\Delta\varepsilon$ l'angle aigu que forment les tangentes à la courbe aux extrémités A, B de cet arc, on donne le nom de courbure de la courbe au point A à la limite

$\frac{d\varepsilon}{ds}$ du rapport $\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}$ quand Δs tend vers zéro, B se rapprochant de A. On donne de même le nom de rayon de courbure de la courbe en A à la limite $\frac{ds}{d\varepsilon}$ du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta \varepsilon}$. Le cercle de courbure en A est alors le cercle qui a son centre sur la normale en A à une distance de A prise vers la concavité de la courbe en A et égale à $\frac{ds}{d\varepsilon}$. On démontre en Géométrie analytique que le centre de courbure en A coïncide avec le point où la normale en A coupe la normale infiniment voisine, c'est par suite un point de la développée de la courbe. On démontre encore que le cercle de courbure coïncide avec le cercle qui passe par trois points infiniment voisins d'une courbe, cercle auquel on donne le nom de cercle osculateur.

Dans le cas des courbes planes, le cercle de courbure au point (x, y) ou au point (r, θ) est déterminé par les équations

$$\alpha - x = -\frac{dy}{dx}\,\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}},\quad \beta - y = \frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$



$$\rho = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left(r^2+\frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\frac{dr^2}{d\theta^2}-r\frac{d^2r}{d\theta^2}},$$

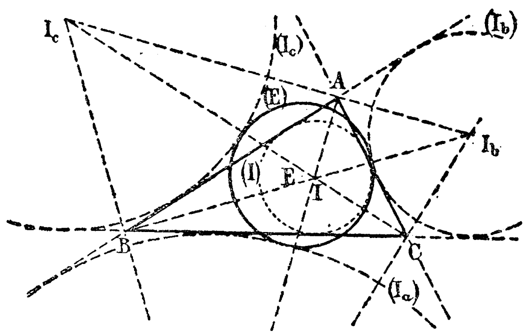
α, β désignant les coordonnées du centre de courbure C au point M, ρ le rayon de courbure CM. $\frac{1}{\rho}$ est la mesure de la courbure.

Si l'on mène la tangente MB en M et qu'on projette le pôle en B sur la tangente, on a aussi la formule $\rho = r\,\frac{dr}{dp}$, p désignant la distance OB du pôle O à la tangente.

Pour plus de détails relatifs à la courbure des courbes planes et des courbes gauches, voir les Traités de calcul différentiel ou de géométrie analytique.

Le cercle osculateur traverse la courbe au point M. Le lieu des centres de courbure (α, β) est la développée de la courbe. Les points d'une courbe où le rayon de courbure devient maximum ou minimum sont appelés sommets de la courbe.

Cercle de Feuerbach. — Dénomination donnée en Allemagne au cercle d'Euler ou des neuf points, à qui Feuerbach a reconnu la remarquable propriété d'être tangent au cercle inscrit (I) et aux trois cercles exinscrits (I_a), (I_b), (I_c) (Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des Dreiecks, Nürnberg, 1822).



Cercle de Fuhrmann. — Etant donnés un triangle ABC, H l'orthocentre (ou point de concours des hauteurs), et ν le point de Nagel (ou point de concours des droites joignant les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés avec les cercles exinscrits correspondants), le cercle de Fuhrmann est le cercle décrit sur Hν pour diamètre.

Pour diverses propriétés de ce cercle, voir M., 1890, p. 105-111.

Cercle de gorge. — Cercle de plus petit rayon d'une surface de révolution ayant pour méridienne une courbe tournant sa convexité vers l'axe de révolution.

Exemples : Le cercle de gorge (ou la gorge) d'une poulie; le cercle de gorge de l'hyperboloïde de révolution à une nappe ; etc.

Cercle de Joachimsthal. — D'un point quelconque M du plan, on peut mener en général quatre normales à une conique à centre. Soient A, B, C, D leurs points d'incidence, A′ le point diamétralement opposé à A. Le cercle BCD passe par A′ (Joachimsthal) et par la projection P du centre O de la conique sur la tangente en A′ (G. de Longchamps ; E. Laguerre).

Le cercle B C D est appelé cercle de Joachimsthal.

Par suite, à tout point M du plan correspondent, par rapport à une conique donnée (à centre), quatre cercles de Joachimsthal (A′ B C D, AB′ CD, A B C′ D, A B C D′).

Dans le cas de la parabole, un des pieds (A, par exemple) est à l'infini (sur la parallèle à l'axe). Son point diamétralement opposé est le sommet O, et le théorème s'énonce ainsi :

Le cercle qui passe par les pieds des trois normales menées d'un point M à une parabole passe aussi par le sommet de cette courbe.

Equation. — Soient α, β les coordonnées du point M; x_1, y_1, celles du pied A d'une des normales. Si la conique est une ellipse d'équation $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, le cercle qui passe par les pieds B, C, D des trois autres normales a pour équation

$$x^2 + y^2 + x\left(\frac{c^2 x_1}{a^2} - \alpha\right) - y\left(\frac{c^2 y_1}{b^2} - \beta\right) = \frac{a^2 y_1^2}{b^2} + \frac{b^2 x_1^2}{a^2} + \alpha x_1 + \beta y_1.$$

Si la conique à centre est $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$, l'équation du cercle A′ B C D prend la forme suivante, due à Laguerre,

$$x^2 + y^2 + x x_1 + y y_1 = h\left(\frac{\alpha x_1}{A} + \frac{\beta y_1}{B} - 1\right),$$

h désignant la valeur commune des deux quantités

$$\frac{A\alpha}{x_1} + B, \qquad \frac{B\beta}{y_1} + A.$$

Si on rapporte la conique à la quatrième normale comme axe des y et à la tangente au pied de cette normale, son équation est

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 E y = 0,$$

et celle du cercle de Joachimsthal se met sous la forme simple

$$\begin{vmatrix} Bx + Cy + 2E & Cx - By + B\beta \\ Ax + By & Bx - Ay + A\beta + E \end{vmatrix} = 0,$$

le point d'où les normales sont issues ayant pour coordonnées $(0, \beta)$, Jamet (M., 1891, p. 105-108).

Dans le cas de la parabole $y^2 = 2px$, l'équation de l'unique cercle de Joachimsthal du point M (α, β) est

$$x^2 + y^2 - \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + 4p^2}{2p} x + \frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)}{4p^2} = 0.$$

Propriétés. — 1. — Soient P, Q les intersections de la normale MA avec le grand et le petit axe de la conique, les coordonnées du centre du cercle de Joachimsthal B C D sont égales aux moitiés des projections des droites MP, MQ faites respectivement sur le grand et sur le petit axe (de Longchamps).

On déduit de cette propriété une construction du cercle BCD lorsqu'on connaît M et A.

2. — La droite qui joint le point M au centre d du cercle de Joachimsthal ABC est la conjuguée harmonique de la quatrième normale par rapport aux trois autres (Laguerre, C. R., 1877).

3. — Si a, b, c, d sont les centres des cercles de Joachimsthal de M, les parallèles menées par ces points aux normales MA, MB, MC, MD concourent en un point μ de la droite MO, O étant le centre de la conique. Le point μ est tel que $\overline{O\mu} = \frac{1}{2}\,\overline{MO}$ (Laguerre, C. R., 1877).

4. — Les quatre cercles de Joachimsthal d'un point M coupent la conique en quatre points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (en dehors des pieds des normales) tels que les normales en ces points sont concourantes.

5. — Si d'un point P on mène les quatre normales à une ellipse et que l'on considère l'intersection des quatre cercles de Joachimsthal avec l'hyperbole équilatère qui passe par les pieds de ces normales, on obtient, outre les pieds de ces quatre normales, quatre autres points situés sur une ellipse de forme invariable ayant son centre au point P et ses axes parallèles à ceux de l'ellipse donnée.

6. — *Généralisation du théorème de Joachimsthal.* — Si d'un point M on mène à une conique à centre quatre obliques la coupant sous un même angle, dans un sens déterminé, ou comme on dit, quatre normales d'angle α, les pieds de trois de ces obliques et le point diamétralement opposé au pied de la quatrième sont sur un même cercle.

Réciproquement, tout cercle coupe une ellipse en quatre points tels que trois d'entre eux et le point diamétralement opposé au quatrième soient les pieds de trois normales d'angle α et concourant en un même point.

La théorie des normales d'angle α conduit encore à la propriété suivante, analogue à celle qui sert de définition à l'hyperbole d'Apollonius :

Les pieds des normales d'angle α menées d'un point P à une conique à centre sont sur une conique qui passe par P et par le centre de la première conique.

7. — *Autre généralisation.* — Si, étant donnés une conique à centre et un cercle C, on appelle normale à la conique relativement au cercle la droite qui joint un point de la conique au pôle de la tangente en ce point par rapport au cercle, d'un point M du plan on peut mener quatre normales relatives, trois des points d'incidence et le point diamétralement opposé au quatrième sont sur un même cercle.

Bibliographie. — *Béghin.* — Sur le cercle de Joachimsthal (S. M., 1890, t. 18, p. 138-140).

Desboves. — Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques, 1861, Gauthier-Villars.

Rodolphe Guimaraes. — Equation du cercle de Joachimsthal (P. M. S., 1900, p. 14-16).

V. Jamet. — Sur le théorème de Joachimsthal (M., 1891, p. 105-108).

Joachimsthal. — Sur la construction des normales que l'on peut abaisser d'un point donné sur une conique complètement tracée (Cr., 1854, t. 48).

Laguerre. — Sur les normales que l'on peut mener d'un point donné à une conique (C. R., 1877 et S. M., 1876-77, p. 30-43 et 92-95).

Laguerre. — Sur quelques théorèmes de Joachimsthal (S. M., 1876).

P.-H. Schoute. — Sur les normales d'angle α (M., 1887, p. 38-44).

P.-H. Schoute. — La représentation cyclographique des cercles de Joachimsthal (Acad. des Sc. d'Amsterdam, 1898-1899, t. 7, p. 6-12. Voir B. D., 2e partie, 1900, p. 160-161).

Voir aussi H. Brocard (M. 1883, p. 39); G. de Longchamps (A. F. A. S., Paris, 1878, p. 49; N. C., 1879, p. 279; Géom. anal., 1884, pp. 399, 412, 482; M., 1889, p. 153-156); E. Lucas (N. A., 1880, p. 279); J. Neuberg (N. C., 1880, pp. 105-109, 241-250, 289-299); Weill (N. A., 1880, p. 60-62; 1881, pp. 73-94, 110-112). L. P., t. 4, nos 68, 86, etc.

Cercle de Lemoine. — Il y a deux cercles de ce nom (Voir ci-dessus, la figure de la p. 148, où ils sont représentés).

Premier cercle de Lemoine. — Ce cercle, concentrique au cercle de Brocard, passe par les intersections des côtés du triangle ABC avec les parallèles A′ A″, etc. menées aux autres côtés par le point de Lemoine K. C'est le cercle que R. Tucker avait appelé *The triplicate ratio circle.* Son équation est, en coordonnées barycentriques,

$$\sum \frac{\alpha\beta}{a^2 b^2} - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{m^4} \sum \frac{b^2+c^2}{a^2}\,\alpha = 0.$$

Deuxième cercle de Lemoine. — Ce cercle a pour centre le point de Lemoine K et il passe par les intersections des côtés du triangle ABC avec les antiparallèles à ces côtés ou avec des parallèles D′ E′, etc. menées par le point K aux côtés du triangle orthique DEF. C'est le cercle que J. Casey a dénommé *The cosine circle.* Son équation est, en coordonnées barycentriques,

$$\sum \frac{\alpha\beta}{a^2 b^2} - 2\frac{\alpha+\beta+\gamma}{m^4} \sum \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2}\,\alpha = 0.$$

K_1, K_2 désignant les rayons de ces deux cercles, R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, et R_1 le rayon du cercle de Brocard, on a les relations

$$R^2 = 3K_1^2 + R_1^2, \quad K_1^2 = R_1^2 + K_2^2, \quad K_1^2 = R^2\frac{n^4}{m^4}.$$

NOTE. — J. Casey a étendu aux polygones harmoniques la notion des deux cercles de Lemoine.

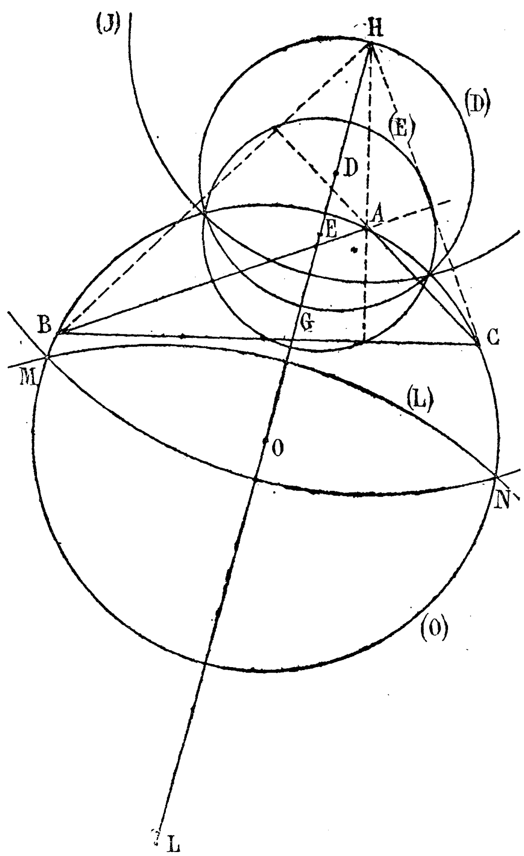
Voir, pour ces cercles, les ouvrages relatifs à la Géométrie récente du Triangle.

Cercle de l'infini. — Dénomination abréviative de cercle imaginaire de l'infini. C'est le cercle commun à toutes les sphères de l'espace. Laguerre lui a donné aussi le nom d'ombilicale.

Voir *A. Mannheim :* Deux théorèmes d'une nature paradoxale, A. F. A. S., Lyon, 1873, p. 82-84.

Cercle de Longchamps. — Ce cercle a pour centre l'orthocentre L du triangle anticomplémentaire du triangle ABC; comme le cercle polaire conjugué, il n'est réel que si le triangle

ABC est obtusangle (Voir la figure ci-dessous). Il a pour équation, en coordonnées barycentriques,



$$(\alpha+\beta+\gamma)(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma)$$
$$-(a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta)=0,$$

et son rayon est donné par la formule

$$\rho'^2=-16\,R^2\cos A\cos B\cos C$$
$$=16\,R^2-2\,m^2=4\,\rho^2.$$

Il est le double du rayon ρ du cercle polaire conjugué.

Pour une étude de ce cercle, voir J. S., 1886, pp. 57-60, 85-87, 100-104, 126-134, G. de Longchamps.

Ce cercle est orthogonal aux cercles décrits des milieux des côtés du triangle comme centres, avec les médianes correspondantes pour rayons. Son centre L est symétrique de l'orthocentre H par rapport au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC. Il passe par les points M, N d'intersection du cercle circonscrit avec le cercle ayant pour centre H et pour rayon le diamètre du cercle circonscrit.

Cercle de Mac-Cay. — Les cercles ainsi nommés sont au nombre de trois. Ils passent par le barycentre G et ont leurs centres aux points de rencontre des médiatrices des côtés a, b, c du triangle avec les droites qui joignent les sommets A, B, C au point diamétralement opposé au point de Tarry (voir Cercle circonscrit) dans l'hyperbole de Kiepert.

Equation. — L'équation trilinéaire du cercle C_a correspondant au sommet A est

$$3\,\Sigma\,\alpha\beta\sin C = \sin A\,(\beta\,\mathrm{cosec}\,C + \gamma\,\mathrm{cosec}\,B + \alpha\,\mathrm{cotg}\,A)\,\Sigma\,\alpha\sin A;$$

son équation barycentrique est

$$3\,\Sigma\,a^2\beta\gamma - [(b^2+c^2-a^2)\,\alpha + a^2(\beta+\gamma)]\,\Sigma\,\alpha = 0,$$

ou

$$(b^2+c^2-a^2)\,\alpha^2 + a^2\beta^2 + a^2\gamma^2 - a^2\beta\gamma + (c^2-2b^2)\,\alpha\gamma + (b^2-2c^2)\,\alpha\beta = 0.$$

Propriétés. — Parmi les nombreuses propriétés de ces cercles, nous mentionnerons les suivantes :

1. — Si l'on construit sur les trois côtés de ABC, pris comme côtés homologues, trois figures semblables, on peut trouver, dans ces figures, une infinité de systèmes de trois points homologues M_a, M_b, M_c en ligne droite. Les lieux de ces points sont les trois cercles C_A, C_B, C_C de Mac-Cay.

2. — Les sommets du premier triangle de Brocard sont respectivement les pôles des côtés de ABC par rapport aux trois cercles de Mac-Cay.

3. — Les côtés du second triangle de Brocard sont les axes radicaux du cercle de Brocard et des trois cercles de Mac-Cay.

4. — Les cercles de Mac-Cay passent respectivement par les sommets A'', B'', C'' du second triangle de Brocard.

Voir J. Casey, Géom. analyt., pp. 255, 326 (1885) ; J. S., 1889, p. 57 (E. Vigarié).

Cercle de Malfatti. — Dénomination proposée pour les trois cercles qui résolvent le problème de Malfatti : « Inscrire à un triangle ABC le système de trois cercles tangents entre eux et à deux côtés du triangle. »

Steiner a donné de ce problème la solution suivante : I désignant le centre du cercle inscrit au triangle donné ABC, on inscrit un cercle dans chacun des triangles IBC, IAC, IAB ; on mène les secondes tangentes communes intérieures à ces trois cercles pris deux à deux. On obtient ainsi trois triangles ayant chacun pour côtés une de ces tangentes et deux côtés du triangle ABC. Les cercles inscrits dans ces nouveaux triangles sont les cercles demandés.

Pour la bibliographie de ce problème, voir : J. Casey, *A Sequel to Euclid;* E. Catalan, *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*; Desboves, *Questions de Géométrie* ; Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie ;* etc.

Cercle de Miquel. — Il y a plusieurs cercles de ce nom.

Cas du quadrilatère. — On considère quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, qui se coupent deux à deux ; soient C_1 le cercle circonscrit au triangle $\Delta_2\,\Delta_3\,\Delta_4$ et ω_1 son centre. Les quatre points ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 sont situés sur un cercle passant par le foyer de la parabole tangente aux droites données (Voir G. de Longchamps, *Géom. analyt.*, p. 490).

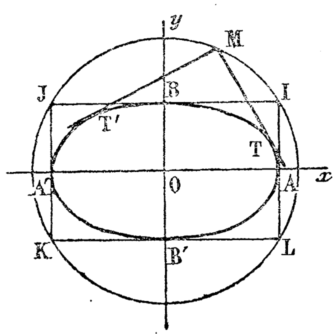
Cas du pentagone. — Les côtés d'un pentagone étant prolongés forment cinq triangles extérieurs au pentagone. Les cinq points d'intersection des cercles circonscrits à ces triangles sont sur un même cercle (Voir J. Casey, *A Sequel to Euclid*, 1892, p. 151-152).

Si cinq droites touchent une même hypocycloïde à trois rebroussements, leur cercle de Miquel dégénère en une ligne droite avec sa droite de l'infini (*S. Kantor*, Quelques théorèmes sur l'hypocycloïde à trois rebroussements, B. D., 1879, p. 136-144).

E. Malo a indiqué (I. M., 1902, p. 261-265) vingt nouveaux points du cercle de Miquel.

Pour un théorème analogue au théorème de Miquel, voir I. M., 1896, p. 83.

Cercle de Monge. — Cercle (ou circonférence) lieu des points d'où l'on voit une conique sous un angle droit, dans le plan de cette conique ; autrement dit, c'est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique à centre. On l'appelle aussi *cercle orthoptique*, ou cercle directeur, par assimilation à la directrice de la parabole, qui est la ligne orthoptique de cette conique.



Le cercle de Monge est le cercle circonscrit au rectangle IJKL des axes AA′, BB′ de l'ellipse. L'angle droit TMT′ de deux tangentes MT, MT′ a son sommet sur ce cercle.

L'équation du cercle de Monge est $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

Dans le cas de la parabole représentée par l'équation $y^2 = 2px$, le cercle orthoptique devient la directrice $x = -\frac{p}{2}$.

Voir N. A., 1886, p. 97-106 (d'Ocagne); L. P., t. 4, n° 83, etc. et les traités de Géométrie analytique.

H. Faure a proposé aussi le nom de cercle diagonal pour désigner le cercle orthoptique. H. Picquet, à qui est due la dénomination de cercle orthoptique (Etude géométrique des systèmes ponctuels et tangentiels de sections coniques, 1872, p. 40), avait également proposé pour l'analogue dans l'espace le nom de sphère orthogone (S. P., 1865, p. 196-200).

Propriétés. — 1. — Les cercles de Monge des coniques d'un faisceau tangentiel passent par deux points fixes.

2. — Le cercle circonscrit à un triangle conjugué à une conique est orthogonal à son cercle de Monge (H. Faure).

3. — La polaire réciproque d'une conique par rapport à un point de son cercle de Monge est une hyperbole équilatère.

4. — Si d'un point M du cercle de Monge d'une conique on mène des perpendiculaires aux côtés d'un triangle quelconque conjugué par rapport à cette conique, le cercle podaire de M par rapport à ce triangle passe par un point fixe (Laguerre).

5. — Si la polaire d'un point quelconque N par rapport à une conique coupe celle-ci en M, M′ et son cercle de Monge en Q, Q′, les angles QNQ′ et MNM′ ont mêmes bissectrices (Laguerre).

Historique. — Dès 1685 La Hire (*Sectiones conicae*, L. VIII) a mentionné la propriété des coniques qui sert de définition au cercle de Monge, mais c'est Monge qui a fait connaître la propriété analogue des quadriques à centre d'avoir les sommets de leurs trièdres trirect angles circonscrits sur une sphère.

Bibliographie. — *Laguerre.* — Sur une propriété du cercle de Monge (N. A., 1879, p. 204-206).

D'Ocagne. — Sur le cercle orthoptique (N. A., 1886, p. 97-106).

Voir également N. A., 1860, p. 234; Ibid. p. 290-298 (L. Painvin); Ibid. p. 347-349 (G. Salmon); 1861, p. 77-82 (P. Serret); 1875, p. 69; 1879, p. 255-256 (E. Laguerre), et J. Casey (Conic sections, 1885, p. 303).

Voir aussi Cremona, trad. Dewulf, § 195.

Cercle de Neuberg. — Il y a trois cercles de ce nom. Ce sont les cercles passant respectivement par les sommets d'un triangle et ayant leurs centres aux points de rencontre des médiatrices avec les céviennes du point de Tarry (voir Cercle circonscrit).

Si sur chacun des trois côtés du triangle de référence, on construit des triangles ayant même angle de Brocard que ABC (ω désignant cet angle), le sommet libre décrit une circonférence. Les trois circonférences ainsi obtenues sont encore les cercles de Neuberg, N_a, N_b, N_c. Soient x_1, y_1 les coordonnées cartésiennes d'un point par rapport à un côté et à la médiatrice correspondante. Le cercle N_a a pour équation, en coordonnées cartésiennes,

$$x_1^2 + y_1^2 - a\,y_1 \operatorname{cotg} \omega + \frac{3a^2}{4} = 0,$$

ou, en coordonnées normales,

$$\Sigma\, \beta\gamma \sin A = \sin A\,(\beta \operatorname{cosec} C + \gamma \operatorname{cosec} B)\ \Sigma\, \alpha \sin A,$$

ou, en coordonnées barycentriques,

$$a^2 \beta\gamma + b^2 \alpha\gamma + c^2 \alpha\beta - a^2(\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma) = 0.$$

Le rayon du cercle N_a est

$$\rho_a = \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{cotg}^2 \omega - 3}.$$

Equations et formules analogues pour les deux autres cercles.

Propriétés. — Parmi les nombreuses propriétés des cercles de Neuberg N_a, N_b, N_c, nous mentionnerons les suivantes :

1. — Si sur chacun des côtés du triangle A B C, on construit des triangles ayant même angle de Brocard que A B C, les sommets libres décrivent les cercles de Neuberg.

2. — Si sur chacun des côtés de A B C, pris comme côtés homologues, on construit des figures semblables, on peut trouver dans ces figures une infinité de systèmes de trois points M_a, M_b, M_c, tels que les droites AM_a, BM_b, CM_c soient parallèles. Les lieux des points M_a, M_b, M_c sont les trois cercles N_a, N_b, N_c de Neuberg.

3. — Le centre radical des trois cercles de Neuberg est le point $\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}\right)$, réciproque du point de Lemoine.

Voir A. F. A. S., Toulouse, 1887 et J. S., 1889, p. 56 (E. Vigarié).

Cercle de Schoute. — Le lieu d'un point M tel que le triangle podaire (ayant pour sommets les projections orthogonales de M sur les côtés de ABC) ait un angle de Brocard donné ω, est un cercle appelé cercle de Schoute. L'équation de ces cercles est, en coordonnées normales,

$$\Sigma\,\alpha^2 + \Sigma\,\beta\,\gamma\cos A - \lambda\,\Sigma\,\beta\gamma\sin A = 0,\quad \text{avec } \lambda = \operatorname{cotg}\omega_1.$$

Ces cercles ont même axe radical : la droite de Lemoine (ou polaire du point de Lemoine par rapport au cercle circonscrit).

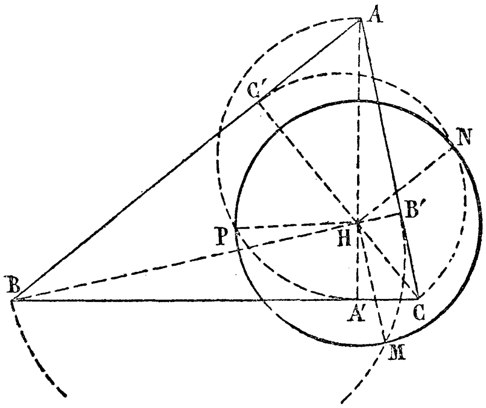
Comme cas particuliers des cercles de Schoute, on peut signaler : le cercle de Brocard ($\lambda = \operatorname{cotg}\omega$); un cercle imaginaire ($\lambda = 0$); le cercle circonscrit à ABC ($\lambda = \infty$); la droite de Lemoine ($\lambda = -\operatorname{cotg}\omega$); les centres isodynamiques V, W ($\lambda = \pm\sqrt{3}$.)

Voir *E. Vigarié*, Algunas propriedades de los triangulos podares y de los circulos de Schoute (P. M. S., 1892, pp. 97-105 et 173-176), ainsi que J. S., 1889, p. 57.

Cercle des cinq points. — Voir Cercle de Brocard, ainsi que cercle des sept points.

Cercle des hauteurs. — Cercle PMN ayant pour centre l'orthocentre H (point de concours des hauteurs AA', BB', CC' d'un triangle ABC) et pour rayon la valeur commune $\sqrt{\overline{AH}.\overline{HA'}} = \sqrt{\overline{BH}.\overline{HB'}} = \sqrt{\overline{CH}.\overline{HC'}}$ des moyennes proportionnelles des segments entre lesquels chaque hauteur est divisée par l'orthocentre H.

Les hyperboles équilatères inscrites au triangle ABC ont leurs centres sur le cercle des hauteurs (N. A., 1850, p. 7 et 1865, p. 34, Mention). L'inscription de ces hyperboles n'est possible que si le triangle est obtusangle; les centres sont alors réels, mais le cercle existe même quand ces centres sont imaginaires, ce qui a lieu lorsque le triangle est acutangle.



Dans le cas du triangle obtusangle, le cercle des hauteurs coïncide avec le cercle conjugué, ce qui prouve que le cercle conjugué est orthogonal aux trois cercles ayant pour diamètres les segments des hauteurs compris entre les sommets du triangle et les côtés opposés.

Pour la bibliographie, voir N. A., *loc. cit.*, 1864, p. 535 et 1865, p. 130.

NOTE. — Les rayons HM, HN, HP sont parallèles aux côtés AC, AB, CB du triangle ABC.

Le cercle (imaginaire) conjugué au cercle des hauteurs du triangle ABC est conjugué (dans l'acception ordinaire du mot) au triangle ABC.

Cercle des inflexions. — Ce cercle se rencontre dans l'étude cinématique du déplacement d'une figure plane, de forme invariable dans son plan. x, y étant les coordonnées du point M, on trouve pour rayon du cercle osculateur à la trajectoire l'expression

$$\rho = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2-ky} = \frac{r^2}{r-k\sin\varphi}$$

où $k = \frac{d\varphi}{d\rho}$, α, β étant les coordonnées du centre de courbure, φ l'angle du rayon de courbure avec Ox.

On voit, sur cette formule, que le lieu des points pour lesquels le rayon de courbure est infini, c'est-à-dire qui, à l'instant considéré, se trouvent en un point d'inflexion de leur trajectoire, est le cercle qui a pour équation $x^2+y^2-ky=0$.

Ce cercle a reçu le nom de cercle des inflexions.

Bibliographie. — La Hire, Traité des roulettes, 1706 ; J. Bresse, J. E. P., 1853, 35e cahier, t. 20, p. 89-116 ; E. Dewulf, N. A., 1883, p. 297-300 ; E. Cesaro, N. A., 1888, p. 211 ; Balitrand, J. S., 1892, p. 121-123.

Cercle des neuf points ou d'Euler. — Cercle des neuf points est un nom de début, qui s'explique par la première propriété trouvée, qui a pu lui servir de définition ; mais il a tout juste la valeur des noms de cercle des cinq points ou de cercle des sept points. Cela résulte de premiers tâtonnements qui ne peuvent que détourner l'attention et laisser préjuger aux chercheurs que le nombre spécifié de points est immuable. L'événement contredit constamment la dénomination proposée. C'est ce qui est arrivé et doit arriver nécessairement à toutes les courbes dites de n points. On a donc voulu remédier à cette imperfection en proposant d'autres dénominations rappelant les propriétés les plus saillantes de ces courbes ou les noms de leurs inventeurs, nonobstant les inconvénients qui pouvaient en résulter et qui se sont produits dans la suite. Il est certain que l'existence de plusieurs dénominations pour un même cercle (comme cela se présente pour le cercle des neuf points, pour le cercle orthoptique), et pour d'autres courbes, est tout à fait contraire à l'esprit scientifique ; tous les mathématiciens sont d'accord sur ce point pour désirer que l'on arrive le plus tôt possible à préciser d'une façon définitive la nomenclature géométrique. Il est à espérer que la publication d'un ouvrage du genre du présent travail sera un acheminement vers la réalisation de ce vœu.

Le cercle d'Euler d'un triangle passe par les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des segments des hauteurs compris entre l'orthocentre et les sommets. C'est pour rappeler cette propriété qu'on avait donné à ce cercle le nom de cercle des neuf points.

Voir Cercle d'Euler.

Cercle des rebroussements. — Lieu des points de rebroussement que les enveloppes des droites d'un plan mobile présentent à un instant donné. Ce cercle est symétrique du cercle des inflexions par rapport à la tangente (voir N. A., 1888, p. 216, E. Cesaro).

Cercle des sépt points. — Autre nom proposé pour le cercle primitivement des cinq points (voir Cercle de Brocard). Toutes les remarques faites ci-dessus au sujet du cercle des neuf points s'appliquent avec plus de force encore aux cercles des cinq, des sept, des n points. Ces noms de hasard ne peuvent avoir qu'une existence précaire.

Cercle de similitude. — Nom donné au cercle décrit sur la ligne des centres de similitude de deux cercles comme diamètre (J. Casey, *A Sequel to Euclid*, 1886, p. 86).

Cercle de Taylor. — Ce cercle est concentrique au cercle inscrit au triangle complémentaire du triangle orthique de ABC. C'est le cercle qui passe par les six projections des pieds des hauteurs (ou sommets du triangle orthique) sur les côtés du triangle ABC. Il a pour équation, en coordonnées barycentriques,

$$\sum \frac{\alpha\beta}{a^2 b^2} - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{16\ R^4} \sum \alpha \operatorname{cotg}^2 A = 0.$$

D'après une note publiée, I. M., 1895, p. 166, ce cercle a été signalé pour la première fois par Eutaris (Restiau ?) et Vuibert (J. E. V., 15 nov. 1877, p. 30), puis par E. Catalan (Probl., 1879, p. 132-134) ; par J. Neuberg (M., 1881, p. 14) et ensuite par Taylor, etc.

Bibliographie. — En dehors des références que nous venons de citer, on pourra consulter : H.-M. Taylor (M. M., 1882, p. 177-179) ; R.-C. Rowe (M. M., 1883, p. 36) ; R. Tucker (M. M., 1883, p. 181-182) ; E. Vigarié (J. E., 1886, pp. 106-109 et 151-153; J. S., 1889, p. 55-56); M., 1889, p. 250.

Cercle de Torricelli. — Il y a six cercles de ce nom. Ce sont les cercles circonscrits aux triangles équilatéraux construits extérieurement ou intérieurement sur les côtés d'un triangle ABC. Leurs points de concours déterminent les centres isogones.

Voir M., 1889, p. 173 (J. Neuberg et Ed. Lucas) ; J. E., 1896, p. 226 (G.-F. d'Avillez).

Cercle de Tucker. — Ces cercles forment un groupe admettant plusieurs définitions. Par exemple, si un triangle $A'B'C'$ est homothétique avec ABC par rapport au point de Lemoine K, les côtés des triangles se coupent en six points situés sur une même circonférence appelée cercle de Tucker.

On peut encore dire que le cercle de Tucker passe par les intersections de chacun des côtés de ABC avec les deux côtés non correspondants d'un triangle $A''B''C''$ dont les sommets sont sur les symédianes et dont les côtés sont parallèles à ceux du triangle orthique de ABC.

L'équation générale des cercles de Tucker est, en coordonnées barycentriques,

$$\Sigma \frac{\beta\gamma}{c^2 b^2} - \lambda \Sigma \alpha \Sigma \left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right) \alpha = 0,$$

où

$$\lambda = \frac{\mathrm{A\,A'}}{(a^2 + b^2 + c^2)\,\mathrm{A\,K}}.$$

Les deux cercles de Lemoine et le cercle de Taylor sont des cas particuliers des cercles de Tucker.

Le lieu des centres des cercles de Tucker est une droite : c'est le diamètre du cercle de Brocard. L'enveloppe des cercles de Tucker est l'ellipse de Brocard.

Bibliographie. — J. Neuberg (E. T., 1885, p. 71 ; J. S., 1886, p. 241-245) ; R. Tucker (Q. J., 1884, p. 57 ; P. L. M. S., 1886, p. 420-431 ; 1894, p. 389-394) ; E. Vigarié (J. S., 1886, pp. 195-198, 222-227 ; P. M. S., 1893, p. 333-340).

Cercle d'Euler ou **des neuf points**. — Voir la figure de la page 156. — Cercle passant par les milieux des côtés d'un triangle. *Euler* (Mémoires de Pétersbourg, 1765, t. 11), a fait la première étude systématique des points remarquables du triangle, et il a démontré que les points O, G, H sont en ligne droite, avec $\mathrm{OG} = \frac{1}{2}\,\mathrm{GH}$, et que neuf autres points, savoir : les milieux des côtés, les pieds des hauteurs (ou sommets du triangle orthique), et les milieux des segments des hauteurs entre les sommets et l'orthocentre sont sur un même cercle qui a pour centre le milieu E de OH et pour rayon $\frac{\mathrm{R}}{2}$.

En d'autres termes, le cercle d'Euler est la figure homothétique du cercle circonscrit, l'orthocentre H et le barycentre G étant les centres d'homothétie, et le rapport de similitude étant $\frac{1}{2}$.

Equation. — Pour un triangle représenté par l'équation

$$xy\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0,$$

θ étant l'angle des axes, le cercle d'Euler a pour équation cartésienne

$$4\,(x^2 + y^2 + 2\,x\,y\cos\theta) - 2\,(a + 2\,b\cos\theta)\,x$$
$$- 2\,(b + 2\,a\cos\theta)\,y + ab\cos\theta = 0.$$