AAS7777
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/15/88 R/DT 04/13/89 CC STAT mm E/L 1
035/1: : | a (RLIN)MIUG84-B52150
035/2: : | a (CaOTULAS)160186193
040: : | a MiU | c MiU
100:1 : | a Lebesgue, Henri Léon, | d 1875-1941.
245:00: | a Notice sur les travaux scientifiques | c de Henri Lebesgue.
260: : | a Toulouse, | b Impr. E. Privat, | c 1922.
300/1: : | a 92 p. | c 28 cm.
504/1: : | a Bibliography: p. [8]-12.
650/1: 0: | a Mathematics.
998/1: : | c KLB | s 9124

A M. le Professeur Hjelmslev

En témoignage de haute estime

[illegible]

NOTICE SUR LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Henri LEBESGUE

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. HENRI LEBESGUE

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE

TOULOUSE

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT

14, RUE DES ARTS, 14.

—

1922

FONCTIONS ET TITRES

Élève de l'École Normale Supérieure	1894-1897
Agrégé des Sciences mathématiques	1897
Professeur de la classe de Centrale au Lycée de Nancy	1899-1902
Docteur ès sciences	1902
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rennes	1902-1906
Chargé du cours Peccot au Collège de France	1902-03 et 1904-05
Chargé de cours, puis Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers	1906-1910
Maître de Conférences d'Analyse mathématique à la Faculté des Sciences de Paris	1910-1919
Professeur d'application de l'Analyse à la Géométrie à la Faculté des Sciences de Paris	1920-1921
Professeur de mathématiques au Collège de France	1921

Membre honoraire de la Cambridge philosophical Society	Mai 1914
Membre étranger de l'Académie royale des Sciences et des Lettres du Danemark	Avril 1920

Lauréat de l'Institut :

Prix Houllevigue	1912
Prix Poncelet	1914
Prix Saintour	1917
Prix Petit d'Ormoy	1919

La Section de Géométrie m'a présenté,

En troisième ligne	en 1912 et en 1919
En deuxième ligne	en 1921

LISTE DES PUBLICATIONS

FAITES DANS DES JOURNAUX SCIENTIFIQUES

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

1. Sur les Intégrales singulières (3e série, t. I, 1909).
2. Remarque sur un énoncé dû à Stieltjès et concernant les intégrales singulières (3e série, t. I, 1909).
3. Exposé géométrique d'un Mémoire de Cayley sur les polygones de Poncelet (3e série, t. XIII, 1922).

Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure.

4. Sur les séries trigonométriques (3e série, t. XX, 1903).
5. Sur l'intégration des fonctions discontinues (3e série, t. XXVII, 1910).
6. Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration (3e série, t. XXXV, 1918).
7. Sur une définition due à M. Borel (3e série, t. XXXVII, 1920).

Annali di Matematica pura ed applicata.

8. Intégrale, longueur, aire (3e série, t. VII, 1902); publié aussi comme Thèse de Doctorat.

Atti della reale Accademia delle Science di Torino.

9. Sur les transformations ponctuelles transformant les plans en plans qu'on peut définir par des procédés analytiques (Extrait d'une lettre à M. Corrado Segre; t. XLII, 1907).

Bulletin de la Société Mathématique de France.

10. Sur le problème des aires (t. XXXI, 1903 et t. XXXIII, 1905).
11. Une propriété caractéristique des fonctions de classe un (t. XXXII, 1904).

12. Sur la théorie des ensembles (lettre à M. Borel) (t. XXXIII, 1905).
13. Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo (t. XXXV, 1907).
14. Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm (t. XXXVI, 1908).
15. Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz (t. XXXVIII, 1910).
16. Sur un théorème de M. Volterra (t. XL, 1912).
17. Sur certaines démonstrations d'existence (t. XLV, 1917).
18. Sur les diamètres rectilignes des courbes algébriques planes (t. XLIX, 1921).

Bulletin des Sciences Mathématiques.

19. Sur l'approximation des fonctions (t. XXII, 1898).
20. Sur les transformations de contact des surfaces minima (t. XXVI, 1902).
21. Sur la représentation analytique à partir de $z = x + iy$ des fonctions continues de x et y (t. XXXVII, 1903).
22. Remarques sur la définition de l'intégrale (t. XXIX, 1905).
23. Analyse d'un ouvrage de M. et Mme W. H. Young « The theory of sets of points » (t. XXXI, 1907).
24. Analyse du tome II (3e édition) du Cours d'analyse de l'École Polytechnique par M. C. Jordan (t. XXXIX, 1915).

    Analyse du tome III du même ouvrage (t. XXXXII, 1918).
25. Analyse d'un ouvrage de M. de la Vallée Poussin : Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle (t. XXXXIV, 1920).
26. A propos d'un nouveau journal mathématique : Fundamenta Mathematicæ (t. XXXXVI, 1922).
27. Analyse de la thèse de M. Antoine (t. XXXXVI, 1922).

Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France.

28. Sur la non-applicabilité de deux espaces d'un nombre différent de dimensions (1911).
29. Sur le théorème de la moyenne de Gauss (1911).
30. Sur les fonctions permutables de M. Volterra (1912).
31. Sur les cas d'impossibilité du problème de Dirichlet (1912).
32. Observations sur une communication de M. Z. de Geöcze (1913).
33. Sur l'équivalence du problème de Dirichlet et du problème du calcul des variations considéré par Riemann (1913).

34. Sur les courbes orbiformes (1914).
35. Sur le problème des isopérimètres et sur les domaines de largeur constante (1914).
36. Sur des problèmes isopérimétriques (1918).
37. Sur les polygones de Poncelet (1919).
38. Sur le théorème de la moyenne et le problème de Dirichlet (1920).
39. Sur les polygones de Poncelet (1920).
40. Sur les ombilics d'une quadrique (1920).

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.

41. Sur les fonctions de plusieurs variables (t. CXXVIII, 1899).
42. Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan (t. CXXVIII, 1899).
43. Sur la définition de l'aire d'une surface (t. CXXIX, 1899).
44. Sur la définition de certaines intégrales de surface (t. CXXXI, 1900).
45. Sur le minimum de certaines intégrales (t. CXXXI, 1900).
46. Sur une généralisation de l'intégrale définie (t. CXXXII, 1900).
47. Un théorème sur les séries trigonométriques (t. CXXXIV, 1902).
48. Sur l'existence des dérivées (t. CXXXVI, 1903).
49. Sur une propriété des fonctions (t. CXXXVII, 1903).
50. Sur les fonctions représentables analytiquement (t. CXXXIX, 1904).
51. Sur une condition de convergence des séries de Fourier (t. CXL, 1905).
52. Sur la divergence et la convergence non uniforme des séries de Fourier (t. CXLI, 1905).
53. Sur le problème de Dirichlet (t. CXLIV, 1907).
54. Sur le problème de Dirichlet, deuxième note (t. CXLIV, 1907).
55. Sur les suites de fonctions mesurables (t. CXLIX, 1909).
56. Sur l'intégrale de Stieltjès et sur les opérations fonctionnelles linéaires (t. CL, 1910).
57. Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variétés fermées (t. CLII, 1911).
58. Sur le problème de Dirichlet (t. CLIV, 1912).
59. Sur le principe de Dirichlet (t. CLV, 1912).

Fundamenta Mathematicæ.

60. Sur les correspondances entre les points de deux espaces (t. II, 1921).

Journal de Mathématiques pures et appliquées.

61. Sur les fonctions représentables analytiquement (6e série, t. I, 1905).

62. Sur quelques questions de minimum relatives aux courbes orbiformes et sur leurs rapports avec le calcul des variations (8e série, t. IV, 1921).

L'Enseignement mathématique.

63. Sur la définition de l'aire des surfaces (t. X, 1908).

L'Intermédiaire des Mathématiciens.

64. Sur l'égalité des polyèdres (t. XXI, 1909).

Mathematische Annalen.

65. Recherches sur la convergence des séries de Fourier (Bd. LXI, 1905).

66. Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant à des espaces à n et à $n+p$ dimensions (extrait d'une lettre à M. O. Blumenthal) (Bd. LXX, 1911).

Nouvelles Annales de Mathématiques.

67. Sur l'équilibre du corps solide (4e série, t. IX, 1909).

68. Sur un théorème de M. R. Bricard (4e série, t. X, 1910).

69. Exposition d'un mémoire de M. W. Crofton (4e série, t. XII, 1912).

70. Sur les arcs d'épicycloïdes (4e série, t. XVI, 1916).

71. Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford (4e série, t. XVI, 1916).

72. Sur deux théorèmes de Mannheim et de M. Bricard concernant les lignes de courbure et les lignes géodésiques des quadriques (4e série, t. XVIII, 1918).

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

73. Sur le problème de Dirichlet (t. XXIV, 1907).

74. Sur la représentation approchée d'une fonction (extrait d'une lettre à M. E. Landau) (t. XXVI, 1908).

Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei.

75. Sur les fonctions dérivées (3e série, t. XV, 1906).
76. Encore une observation sur les fonctions dérivées (3e série, t. XVI, 1907).
77. Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration (3e série, t. XVI, 1907).

Revue de l'Enseignement des Sciences.

78. Sur l'équilibre du corps solide (1909).
79. Sur les programmes d'arithmétique et d'algèbre (1910).
80. Quelques leçons sur les courbes épicycloïdales (1915).
81. Sur les angles polyèdres (1916).
82. Sur les angles polyèdres, deuxième article (1916).
83. Sur un problème de minimum (1918).

Revue scientifique.

84. Les professeurs de Mathématiques au Collège de France. — Humbert et Jordan; Roberval et Ramus. — Leçon d'ouverture professée au Collège de France (60e année, avril 1922).

OUVRAGES SÉPARÉS

85. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Paris, Gauthier-Villars, 1904).
86. *Démonstration d'un théorème de M. Baire* (note II des *Leçons sur les fonctions de variable réelle et les développements en série de polynômes de M. E. Borel;* Paris, Gauthier-Villars, 1905).
87. *Leçons sur les séries trigonométriques* (Paris, Gauthier-Villars, 1906).

INTRODUCTION

Avant d'aborder l'examen détaillé de mes travaux, qui se rattachent presque tous à la théorie des fonctions de variables réelles, je veux, dans cette introduction, rappeler le prodigieux essor pris par cette théorie durant ces trente dernières années, malgré les préventions qui s'élevaient contre elle; car je crois bien que mon principal titre est d'avoir été l'un de ceux qui, en diminuant singulièrement ces préventions, ont contribué à cet essor et peut-être celui qui a le mieux montré quelles ressources puissantes pour le progrès des parties même les plus classiques des mathématiques pouvaient être obtenues par l'examen patient et prolongé des propriétés des fonctions de variables réelles.

Pour bien montrer l'état des esprits au moment où j'ai commencé mes recherches, j'indiquerai certaines résistances que j'ai rencontrées; tous ceux qui se sont consacrés au même genre d'études ont rencontré des résistances analogues. Je puis le faire sans scrupule, car il ne s'est jamais agi que de conflits d'idées, et j'ai toujours trouvé la plus grande bienveillance personnelle chez ceux-là même à qui mes travaux étaient le moins sympathiques.

En 1899, j'avais remis à M. Picard une Note [**42**] [1] sur les surfaces non réglées applicables sur le plan; Hermite voulut un instant s'opposer à son insertion dans les *Comptes Rendus* de l'Académie; M. Picard dut défendre ma Note. On sait combien, cependant, Hermite était bienveillant et prodigue d'éloges, mais c'était à peu près l'époque où il écrivait à Stieltjès : « Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivées », et il aurait voulu voir exclues du domaine des mathématiques toutes les recherches où ces horrifiques fonctions intervenaient. Or, dans ma Note, je considérais des fonctions qui n'avaient pas, nécessairement une dérivée. Pour beaucoup de mathématiciens, je devins l'homme des fonctions sans dérivée, encore que, à aucun moment, je ne me sois attaché à l'étude et à la considération de ces fonctions. Et, comme l'horreur que manifestait Hermite était ressentie par presque tous, dès que j'essayais de prendre part à une conversation mathématique il se trouvait un Analyste pour me dire :

---

[1] Les numéros entre crochets renvoient à la liste des publications.

« Cela ne peut vous intéresser, il s'agit de fonctions ayant une dérivée », et un Géomètre pour répéter en son langage : « Nous nous occupons de surfaces ayant un plan tangent ».

Darboux avait consacré son Mémoire de 1875 à l'intégration et aux fonctions sans dérivée; il ne ressentait donc pas la même horreur qu'Hermite. Pourtant, je doute qu'il m'ait jamais pardonné entièrement ma Note sur les surfaces applicables; pendant longtemps, il ne s'intéressa guère à mes Mémoires sur l'intégration qui, en un certain sens, prolongeaient cependant le sien. On raconte qu'en 1875, Darboux fut quelque peu blâmé de s'être laissé aller à étudier de pareilles questions; soit à cause de ces remontrances, soit plutôt à cause de la beauté et de l'importance des problèmes qu'il a ensuite abordés, Darboux ne fit pas d'autre incursion dans le domaine des fonctions non analytiques. Les résultats si nombreux et si élégants qu'il a obtenus ailleurs l'ont sans doute conduit, d'abord, à se féliciter d'avoir abandonné l'étude des fonctions générales de variables réelles, ensuite à considérer que ceux qui s'appesantissaient dans cette étude perdaient leur temps au lieu de le consacrer à des recherches utiles.

Bien que, d'un certain point de vue théorique, toute recherche consciencieuse soit utile, l'histoire des Sciences nous montre que de nombreuses études ne le furent pas pratiquement, parce qu'elles ne vinrent pas à leur heure. On s'accordait généralement à trouver prématurée l'étude des fonctions de variables réelles.

M. Borel, qui a toujours beaucoup espéré de la théorie des ensembles, a été, je crois, le premier à penser que mes travaux auraient une utilité en quelque sorte pratique. Il l'a, en tout cas, pensé bien avant moi; je me vois encore hésitant avant de me décider à présenter, comme thèse de Doctorat, le Mémoire où j'ai abordé presque toutes les recherches que j'ai développées par la suite. Je sentis bien, dès le début, que de telles études étaient utiles; je n'aurais su dire dans quelle mesure elles l'étaient. Un peu plus tard, en 1903, j'insistais sur la nécessité de ces études dans la préface de mes *Leçons sur l'Intégration*. Dans une analyse de ce livre, M. Picard, tout en m'encourageant comme il l'a toujours fait depuis le premier jour, laissait percer quelque inquiétude au sujet des exagérations possibles de la tendance que je représentais.

Plus tard encore, en 1909, pour ceux qui continuaient à contester l'utilité de mes travaux, M. Painlevé, à l'occasion d'une importante communication de M. Denjoy, écrivait dans les *Comptes Rendus* : « Il convient de signaler le rôle joué dans ce résultat, par l'extension, due à M. Lebesgue, de l'intégrale définie. Grâce à cette opération, que nombre de géomètres trouvaient artificielle et trop abstraite, une question naturelle, une question fondamentale, qui restait indécise à l'entrée de la théorie des fonctions uniformes, est aujourd'hui tranchée. »

Ces préventions contre les études sur les fonctions de variables réelles, si répandues que je les ai retrouvées presque chez tous — chez ceux qui avaient fait de telles études, chez ceux qui m'avaient constamment encouragé, ainsi que chez moi-même — étaient-elles entièrement dépourvues de fondement? Jusqu'à ces derniers temps, la plupart des travaux sur les fonctions réelles, ceux concernant les séries trigonométriques exceptés, se réduisaient à des remarques, parfois très élégantes, mais sans lien, ne formant nul corps de doctrines et n'ayant servi pratiquement à rien.

D'une part, beaucoup d'énoncés étaient négatifs : grâce à des exemples, souvent très ingénieux, on prouvait que telle définition, que telle propriété, qui semblait générale, ne l'est pas en réalité, et cela conduisait à des fonctions effarantes. On pouvait donc prétendre, non sans apparence de raison, que ces recherches avaient quelque chose de déprimant, qu'elles étaient une école de doute et non d'action; qu'au lieu de dire aux jeunes, prêts à s'élancer avec fougue : « Le terrain vous paraît sûr, mais attention ! en réalité les obstacles et les précipices y abondent », il eût été préférable de pouvoir leur dire : « Là où vous ne voyez qu'obstacles et précipices, je vais vous montrer le terrain sûr. »

On cherchait bien, d'autre part, des énoncés positifs. Malheureusement, une propriété ou une définition ayant été reconnue spéciale, cherchait-on à la généraliser, qu'on aboutissait trop souvent à une notion certes nouvelle, mais ne servant à rien d'autre qu'à être définie; tel avait été le cas pour la notion, cependant si naturelle, d'intégrale par excès ou par défaut, due à Darboux. Cherchait-on les fonctions les plus générales possédant une certaine propriété ou auxquelles s'appliquait une certaine définition, qu'on aboutissait à une classe de fonctions, variable avec la propriété ou la définition envisagée, et qui, par suite, ne pouvait s'introduire naturellement dans aucune recherche; tel avait été le cas pour la classe des fonctions intégrables au sens de Riemann.

On en était encore à la phase observation; on explorait l'amas désordonné des fonctions pour y découvrir des catégories intéressantes, mais, comme on ne savait pas expérimenter sur les fonctions, c'est-à-dire calculer avec elles, s'en servir, on manquait totalement de critères pour juger qu'une catégorie était intéressante. Sans nier la portée que pourraient avoir plus tard les diverses recherches auxquelles je viens de faire allusion — et qu'elles ont en effet maintenant — on pouvait donc penser qu'il y avait plus pressé et qu'il convenait de suspendre ces recherches jusqu'au moment où leur nécessité s'imposerait.

En dépit de l'indifférence et parfois de l'opposition manifestées à l'égard de la théorie des fonctions de variables réelles, cette théorie se constituait sans qu'on s'en rendît compte, grâce aux études spéciales, mais peut-être surtout grâce à l'analyse classique. De plus en plus souvent, en effet, il arrivait, comme cela s'était produit autrefois pour les séries trigonométriques, que l'on rencontrait des fonctions dont l'analyticité n'avait pas besoin d'être supposée. Il en est ainsi, par exemple, dans l'étude des solutions des équations différentielles faites par la méthode de Cauchy-

Lipschitz ou par celle des approximations successives de M. Picard; dans la plupart des solutions du problème de Dirichlet et des problèmes analogues; dans la résolution des équations intégrales. Parfois, certaines des données ou des solutions pouvaient être ou même étaient nécessairement des fonctions discontinues; il en est ainsi pour les deux derniers problèmes que je viens de citer, pour certaines questions d'hydrodynamique ou du calcul des variations; d'autres fois, comme dans une question étudiée par M. Borel, la solution est bien continue, mais elle est nécessairement non analytique. On se familiarisait ainsi avec cette idée qu'une discontinuité, une singularité n'est pas nécessairement une monstruosité.

D'autre part, des recherches comme celles de Poincaré sur la forme des intégrales réelles des équations différentielles, ou celles de M. Hadamard sur les géodésiques, montraient quelles conséquences lointaines et importantes pouvaient résulter du fait qu'une fonction réelle possède ou non une certaine propriété. On apprenait ainsi lentement à regarder ces fonctions réelles, à discerner qu'à leur sujet, tout aussi bien qu'au sujet des fonctions analytiques, bien des questions fondamentales devaient être posées. La méthode directe du calcul des variations, à laquelle resteront attachés les noms d'Arzelà et de M. Hilbert, l'étude des développements déduits de l'équation de Fredholm allaient poser nombre de ces problèmes.

On se trouvait d'ailleurs, et depuis peu de temps, en possession d'un outil indispensable : la théorie des ensembles de points. Dès le début de cette théorie, Cantor, du Bois-Reymond, par exemple, en firent des applications aux fonctions réelles. C'est cependant surtout dans l'étude des fonctions de variable complexe qu'on l'avait utilisée; les auteurs à citer seraient nombreux depuis M. Mittag-Leffler jusqu'à Poincaré, jusqu'à MM. Borel, Goursat, Painlevé, par exemple.

Les modes de raisonnement qui intervenaient dans ces recherches furent, dans la suite, appliqués à la théorie des fonctions de variables réelles. C'est pourquoi, avant d'avoir rien publié sur les fonctions de variable réelle, M. Borel avait déjà rendu les services les plus éminents à la théorie de ces fonctions en introduisant des notions, comme celle de mesure, dont le rôle a été capital et surtout en inaugurant certains modes de raisonnements, par exemple en nous apprenant qu'on peut souvent utiliser un ensemble dénombrable exactement comme s'il ne contenait qu'un nombre fini d'objets [**6**].

En osant incorporer certaines parties de la théorie des ensembles dans son cours de l'École Polytechnique, Jordan réhabilitait en quelque sorte cette théorie; il affirmait qu'elle est une branche utile des mathématiques. Il faisait plus que l'affirmer, il le prouvait par ses recherches sur la mesure des aires et des ensembles, sur l'intégration qui, comme ses études sur la rectification des courbes, sur les séries trigonométriques, sur l'*analysis situs*, ont si bien préparé certains travaux, les miens en particulier.

M. René Baire fut le premier à consacrer toute son activité mathématique à la théorie des fonctions de variables réelles; il sut y trouver le sujet de recherches longues et fondamentales. On ne dira jamais assez l'importance des travaux de ce savant dans la genèse du mouvement actuel; c'est à sa fine analyse que nous devons de savoir discerner tant de propriétés qualitatives des fonctions, et les faire intervenir dans nos raisonnements. De plus et surtout, M. Baire a établi une sorte de hiérarchie des fonctions; les fonctions qu'il a ainsi classées, les fonctions de Baire, comme les appelle M. de la Vallée Poussin, comprennent toutes celles qu'on avait nommées jusque-là, même ces fonctions si étranges qu'on avait formées comme exemples des singularités les plus inattendues. L'importance des fonctions analytiques vient de ce qu'elles forment une famille cohérente en ce sens que, lorsqu'on calcule à partir de fonctions de cette famille, on obtient comme résultat une fonction de la même famille, du moins le plus souvent. Les fonctions de Baire forment une famille cohérente au même titre; pour elles, la propriété indiquée ne souffre même plus d'exception. Dans bien des questions, il n'existe aucune famille naturelle de fonctions plus vaste que celle des fonctions analytiques et moins vaste que celle des fonctions de Baire.

On peut dire que l'analyse classique visait surtout l'étude des fonctions analytiques; l'étude des fonctions de Baire est le domaine de l'analyse moderne. Les travaux qui se rapportent à cette nouvelle analyse se rangent en deux catégories : travaux relatifs à la représentation des fonctions, travaux relatifs aux calculs sur les fonctions. Les beaux Mémoires de M. Baire appartiennent à la première catégorie; après lui, je me suis occupé aussi de ces questions, mais c'est seulement de ceux de mes travaux qui se rangent dans la seconde catégorie que je parlerai ici.

J'ai dit qu'on ne savait pas calculer avec les fonctions générales; on savait bien, $f(x)$ étant donnée pour $x = x_0$, utiliser le nombre $f(x_0)$ dans une addition, par exemple; mais cela c'est calculer sur un nombre et non sur une fonction, c'est faire de l'algèbre et non de l'analyse. Les opérations portant vraiment sur les fonctions, celles où les fonctions interviennent comme un tout et non comme un catalogue de nombres à utiliser *successivement*, les opérations fonctionnelles comme on les appelle, font intervenir *simultanément* toutes les valeurs d'une fonction. L'intégration et la dérivation sont des opérations fonctionnelles; pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, il faut connaître $f(x)$ depuis a jusqu'à b; pour calculer $f'(x_0)$, il faut connaître $f(x)$ depuis $x_0 - h$ jusqu'à $x_0 + k$.

Leibniz et Newton ont fondé l'Analyse parce qu'ils ont défini l'intégration et la dérivation. Toutes les opérations fonctionnelles qui se sont ensuite introduites dérivent de ces deux là, et c'est pourquoi on continue souvent à diviser le calcul infinitésimal en calcul différentiel et en calcul intégral.

Pour que des fonctions puissent servir à quelque chose, pour qu'on puisse calculer avec elles, il faut avoir défini des opérations fonctionnelles qui s'y appliquent,